Analiza matematyczna 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw 8
Transformata Fouriera.
Transformata odwrotna Fouriera.
Szereg Fouriera. Kryterium Diniego.

ZADANIA

8.1. Obliczyć z definicji transformatę Fouriera podanych funkcji
a) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } |x| \leqslant 1 \\ 0 \text{ dla } |x| > 1 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \text{ dla pozostałych } x \end{cases}$, c) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$,
d) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } |x| \leqslant \pi \\ 0 \text{ dla } |x| > \pi \end{cases}$, e) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } |x| \leqslant \pi \\ 0 & \text{gdy } |x| > \pi \end{cases}$, f) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ -1 & \text{dla } \pi < x < 2\pi \end{cases}$,
g) $f(x) = e^{-|x|}$, h) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

8.2. Korzystając z własności transformaty Fouriera wyznaczyć $F(u)$ dla podanych funkcji
a) $f(x) = \begin{cases} 3 + 2\sin x & \text{dla } |x| \leqslant \pi \\ 0 & \text{dla } |x| > \pi \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } |x-4| \leqslant \pi \\ 0 \text{ dla } |x-4| > \pi \end{cases}$,
c) $f(x) = \begin{cases} e^{-2(x+1)} & \text{dla } x \geqslant -1 \\ 0 & \text{dla } x < -1 \end{cases}$, d) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$,
e) $f(x) = e^{-5|x|}$, f) $f(x) = -2xe^{-x^2}$, g)* $f(x) = e^{-x^2}$.

8.3. Podać funkcję $f(x)$, jeśli jej transformata Fouriera ma postać
a) $F(u) = \frac{2}{1+2iu}$, b) $F(u) = \begin{cases} \frac{8\sin(u/4)}{u} & \text{dla } u \neq 0 \\ 2 & \text{gdy } u = 0 \end{cases}$

8.4. Wyznaczyć transformaty Fouriera funkcji $h(x) = f * g(x)$ dla podanych funkcji
a) $f(x) = \begin{cases} 4 \text{ dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \text{ dla pozostałych } x \end{cases}$, $g(x) = e^{-|x|}$, b) $f(x) = g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$,
c) $f(x) = g(x) = e^{-x^2}$, d) $f(x) = g(x) = \frac{1}{1+4x^2}$.

8.5. Wyznaczyć szeregi Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$ funkcji
a) $f(x) = x$, b) $f(x) = |x|$, c) $f(x) = x^2$, d) $f(x) = x^3$, e) $f(x) = \sin(ax)$.

ODPOWIEDZI

8.1. a) $F(u) = \begin{cases} \frac{2\sin u}{u} & u \neq 0 \\ F(u) = 2 & u = 0 \end{cases}$, b) $F(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{u} - i\frac{1-\cos u}{u} & \text{dla } u \neq 0 \\ 1 & \text{dla } u = 0 \end{cases}$, c) $F(u) = \frac{1}{1+u^2} - i\frac{u}{1+u^2}$, d) $F(u) = \begin{cases} \frac{2\sin(\pi u)}{u} & \text{dla } u \neq 0 \\ 2\pi & \text{dla } u = 0 \end{cases}$, e) $F(u) = \begin{cases} -i(\frac{\sin(1-u)\pi}{1-u} - \frac{\sin(1+u)\pi}{1+u}) & \text{dla } |u| \neq 1 \\ -i\pi & \text{dla } u = 1 \\ i\pi & \text{dla } u = -1 \end{cases}$,

f) $F(u) = \begin{cases} \frac{4}{iu} & \text{dla } u \text{ nieparzystych} \\ 0 & \text{dla } u \text{ parzystych} \end{cases}$, g) $F(u) = \frac{2}{1+u^2}$, h) $F(u) = \pi e^{-|u|}$.

8.2. a) wsk. $f(x) = 3g(x) + 2h(x)$ i skorzystać z zadania 10.1 d) i e). b) wsk. $f(x) = g(x-4)$ i skorzystać z zadania 10.1 d). c) wsk. $f(x) = g(2(x+1))$ i skorzystać z zadania 10.1 c). d) wsk. $f(x) = xg(x)$ i skorzystać z zadania 10.1 c). e) wsk. $f(x) = g(5x)$ i skorzystać z zadania 10.1 g). f) wsk. $f(x) = g'(x)$ i skorzystać z zadania 10.2 g). g) $F(u) = \pi e^{-\frac{u^2}{4}}$.

8.3. a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x/2} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$. b) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } |x| \leqslant 1/4 \\ 0 & \text{gdy } |x| > 1/4 \end{cases}$

8.4. a) $H(u) = \begin{cases} 4(\frac{\sin u}{u} - i\frac{1-\cos u}{u})\frac{2}{1+u^2} & \text{dla } u \neq 0 \\ 8 & \text{dla } u = 0 \end{cases}$. b) $H(u) = (\frac{1}{1+iu})^2$. c) $H(u) = \sqrt{\pi/2}(\sqrt{2\pi}e^{-(\sqrt{2}u)^2/4})$. d) $H(u) = \frac{\pi}{4}(\pi e^{-|u|})$.

8.5. a) $2\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$, b) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$, c) $\frac{\pi^2}{3} - 4\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ $cos(nx)$, d) $\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1^2}{n^3}\frac{2n^2}{n}\sin(nx))$, e) $\frac{2\sin(a\pi)}{\pi}\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(3n+1)^2-a^2}\sin(nx)$.