TEORIA GIER W PIGUŁCE

ROBERT RALOWSKI

Spis treści

Notatki z wykładu z *algorytmicznej teorii gier*, sprządziłem na podstawie monografii [1].

1. Wykład pierwszy - gra w szachy (skończona wersja gry)

W tym rozdziale omówimy grę w szach w ujeciu matematycznym. Wspomniana gra jest grą dwuosobową, w której graczmi są gracz A i gracz B (krótko A i B). Gra rozgrywa się na czarnobiałej szachownicy o wymiarach 8×8. Gracz A ma 8 pionków białych oraz 8 białych figur: Król, Królowa, dwa gońce, dwa konie i dwie wieże. Analogicznie gracz B ma podobny zestaw pionków i figur w kolorze czarnym. Przez **stan planszy** (migawka gry) nazywamy konkretne ustawienie pionków i figur na szachownicy. Wśród wszystkich stanów planszy wyróżniamy stan początkowy x_0 od którego gracz A rozpoczyna grę w szachy. Gra jest naprzemienna, to znaczy, że na zmianę wykonują ruch gracz A i gracz$B$ według ustalonych reguł. Reguły te określają tzw. legalne ruchy wykonane przez obydwu graczy. Gra kończy się w niżej wymenionych sytuacjach:

- jeżeli czarny król został zbity, wtedy wygrywa gracz A,
- jeżeli biały król został zbity, wtedy wygrywa gracz B,
- jeżeli na planszy są dwa króle i wypada ruch gracza B, którego nie mże wykonać a jego król (czarny) nie jest w polu bicia przez gracza A (nie ma szachu), wtedy jest remis,
- analogicznie do poprzedniego przypadku ale po zamanie graczy i kolorów,
- jeśli nie zaszedł żaden z wyżej wymienionych przypadków a stan planszy powtórzył się trzykrotnie.

Na mocy ostatniego warunku widzimy, że gra w szachy jest grą skończoną.

Do tej pory przedstawiliśmy grę w szachy w sposób ścisły ale opisowy. Do analizy tej gry użyjemy matematycznych pojęć. Zbiór wszystkich stanów planszy oznaczamy literą M. Natomiast $M^{<\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$ jest zbiorem wszystkich skończonych ciągów o wyrazach ze zbioru M.

Definicja 1 (Stan gry). *Stanem gry (w szachy) nazywamy dowolny ciąg* $(t_k)_{k\leq n} \in M^{<\omega}$ *taki, że,* $t_0 = x_0$ *i dla dowolnego* $k < n$

- $k \equiv 0 \mod 2$, *to* t_{k+1} *jest otrzymany przez legalny ruch gracza* A *ze stanu planszy* t_k,
- $k \equiv 1 \mod 2$, *to* t_{k+1} *jest otrzymany przez legalny ruch gracza* B *ze stanu planszy* t_k.

Przez T rozumiemy zbiór

$$\{x \in M^{<\omega} : x \text{ jest stanem gry}\}.$$

Zauważmy, że jeżeli $x \in T$ i $y \in M^{<\omega}$ jest początkowym ciągiem x-a, to $y \in T$. W zbiorze T możemy wprowadzić relację porządku częściowego $(T, \leq)$ w sposób następujący: dla dowolnych $x, y \in T$, $x \leq y$ jeżeli zachodzi $x \subseteq y$. Jeżeli $x \leq y$ i $x \neq y$, to piszemy $x < y$ i mówimy, że y jest potomkiem x-a. Dalej, y jest dzieckiem x-a, jeżeli $x \leq y$ i $|x| + 1 = |y|$. Oczywiście każde dziecko x-a jest również potomnkiem x-a. Przez $succ(x)$ rozumiemy zbiór wszystkich dzieci x-a, tzn.:

$$succ(x) = \{y \in T : \ x \leq y \wedge |x| + 1 = |y|\}.$$

Niech będa dane dowolne ale różne elementy $x, y \in T$, to dla każdych $x', y' \in T$ takich, że $x \leq x'$ i $y \leq y'$ zachodzi $x' \neq y'$. Stąd wnosimy, że $(T, \leq)$ jest drzewem (brak cykli). Wtedy mówimy, że para $(T, \leq)$ jest **drzewem gry** w szachy. Powiemy, że $x \in T$ jest liściem w drzewie T, jeżeli x nie ma dzieci w T, tzn. $succ(x) = \emptyset$.

Przez U_A rozumiemy zbiór wszystkich stanów gry, przy których gracz A może wykonać legalny ruch, co odpowiada następującemu zbiorowi:

$$U_A = \{x \in T : \ |x| \equiv 1 \mod 2 \wedge x \text{ nie jest liściem w drzewie } T\}.$$

Analogicznie dla gracza B definiujemy zbiór U_B:

$$U_B = \{x \in T : \ |x| \equiv 0 \mod 2 \wedge x \text{ nie jest liściem w drzewie } T\}.$$

Definicja 2 (Strategia graczy)**.** *Dla graczy A i B definiujemy pojęcie strategii σ_A i σ_B odpowiednia.*

- $\sigma_A : U_A \to T$*, taką, że dla każdego* $x \in U_A$ $\sigma_A(x) \in succ(x)$,
- $\sigma_B : U_B \to T$*, taką, że dla każdego* $x \in U_B$ $\sigma_B(x) \in succ(x)$,

Para wybranych strategii (σ_A, σ_B) generuje konkretną rozgrywkę szachową zwaną dalej **partią szachową**. Mianowicie, gracz A stosuje swoją strategię do początkowego stanu planszy $x_0 \in U_A$, tzn. $\sigma_A(x_0) = (x_0, x_1) \in U_B$, następnie gracz B stosuje swoją strategie do stanu gry (x_0, x_1) otrzymanego przez A, dostając $\sigma_B(\sigma_A(x_0)) = \sigma_B(x_0, x_1) = (x_0, x_1, x_2) \in U_A$, i tak dalej. Ponieważ drzewo T jest drzewem skończonym, to dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy ciąg $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, który jest liściem w drzewie T. Wtedy rozgrywka (partia szachowa) jest skończona.

Definicja 3 (Strategia wygrywająca)**.** *Powiemy, że strategia σ_A jest strategią wygrywającą, jeżeli dla dowolnej strategii σ_B gracza B, gracz A wygrywa partię (σ_A, σ_B). Analogicznie powiemy o wygrywającej strategii σ_B dla gracza B.*

Głównym celem tego wykładu jest dowód następującego twierdzenia o grze w szachy.

Twierdzenie 1. *Niech $(T, \leq)$ będzie drzewem gry w szachy, to wtedy zachodzi jedna z nastepujących alternatyw:*

- *gracz A ma strategię wygrywającą, albo*
- *gracz B ma strategię wygrywającą, albo*
- *obydwaj gracze mają strategię gwarantującą przynajmniej remis.*

Niech $x \in T$ będzie ustalonym elementem drzewa T. Wtedy definiujemy $(T_x, \leq_x)$ w sposób następujący:

- $T_x = \{y \in T : \ x \leq y\}$,
- $\leq_x = \leq \cap (T_x \times T_x)$.

Jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumień, to zamiast $(T_x, \leq_x)$ będziemy pisać $(T_x, \leq)$. Dla każdego $x \in T$ definiujemy liczbę naturalną n_x jako $|T_x|$. Zauważmy, że jeżeli $x < y$, to wtedy $T_y \subseteq T_x$ oraz $x \in T_x \setminus T_y$. Więc $n_y < n_x$ dla każdych $x, y \in T$, takich, że $x < y$. Zauważmy, że jeżeli $n_x = 1$, to x jest liściem w drzewie T (i oczywiście liściem w T_x).

Udowodnimy nieco mocniejsze twierdzenie od Twierdzenia 1.

Twierdzenie 2. *Niech $(T, \leq)$ będzie drzewem gry w szachy. Niech*

$$\mathcal{T} = \{T_x : x \in T\}$$

będzie rodziną wszystkich poddrzew generowanych przez $\{x : x \in T\}$. To dla dowolnego $T \in \mathcal{T}$ i gry $(T, \leq)$ zachodzi jedna z nastepujących alternatyw:

- *gracz A ma strategię wygrywającą, albo*
- *gracz B ma strategię wygrywającą, albo*

- *obydwaj gracze mają strategię gwarantującą przynajmniej remis.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy stosując indukcję matematyczną względem mocy drzewa T_x dla $x \in T$. Jeżeli $|T_x| = 1$, to $T_x = \{x\}$ i wtedy x jest liściem w T jak i w T_x. Wtedy gra jest zakończona i wtedy albo wygrał gracz A (więc A ma strategię wygrywającą - nie musi nic robić) albo gracz B ma strategię wygrywającą (o ile tę grę wygrał) albo jest remis i obaj mają strategię gwarantującą remis.

Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie liczbą większą od 1, taką, że dla każdego $x \in T$ jeśli $n_x < n$ to twierdzenie jest prawdziwe dla gry T_x. Niech $y \in T$ będzie dowolnym elementem spełniającym zależność $n_y = n$. Bez straty ogólności załóżmy, że $n_y \equiv 0 \mod 2$ (a wtedy gracz A ma wykonać ruch), w przeciwnym wypadku zamieniamy kolory biały na czarny i vice-versa. Jeżeli gracz A ma strategię wygrywającą σ_{A,T_x} w T_x. gdzie x jest dzieckiem y-a, definiujemy $\sigma_{A,T_y} = \sigma_{A,T_x} \cup \{(y,x)\}$. Oczywiście σ_{A,T_y} jest wtedy wygrywającą strategią gracza A na drzewie T_y.

Załóżmy teraz, że dla każdego $x \in succ(y)$ gracz A nie ma strategii wygrywającej. Wtedy dla każdego takiego x-a gracz B ma strategię wygrywającą albo obydwaj gracze mają strategię, która gwarantuje przynajmniej remis. Jeżeli dla kazdego dziecka y-a gracz B ma strategię wygrywającą, to wtedy wybieramy jakiekolwiek $t \in succ(y)$ i definiujemy $\sigma_{B,T_y} = \sigma_{B,T_t}$ (wtedy tylko gracz A ma ruch). Wtedy σ_{B,T_y} jest strategią wygrywającą gracza B w drzewie T_y.

Został nam ostatni przypadek, dla każdego $x \in succ(y)$ gracz A nie ma strategii wygrywającej i istnieje $t \in succ(y)$, że obydwaj gracze mają strategię gwarantującą remis. Wtedy wybieramy dowolne $x \in succ(y)$ i definiujemy $\sigma_{A,T_y} = \sigma_{A,T_x} \cup \{(y,x)\}$ oraz $\sigma_{B,T_y} = \sigma_{B,T_x}$. Wtedy obydwie strategie σ_{A,T_y} i σ_{B,T_y} gwarantują swoim graczom przynajmniej remis w drzewie T_y.

Stosując zasadę indukcji matematycznej otrzymujemy tezę naszego twierdzenia. □

Dowód Twierdzenia 1. Na mocy poprzedniego twierdzenia Tw. 2 w każdej grze T_x, $x \in T$ zachodzi teza twierdzenia Tw. 2. W szczególności teza twierdzenia jest prawdziwa dla drzewa T_{x_0}, ale x_0 jest korzeniem drzewa T, więc $T = T_{x_0}$. Twierdzenie Tw. 1 zostało udowodnione.

□

2. Rozszerzona postać gry

Rozdział ten rozpoczniemy od przypomnienia pojęcia grafu skierowanego a w szczególności drzewa.

Definicja 4 (Graf skierowany). *Powiemy, że para (V,E) jest grafem jeżeli:*

- *V jest niepustym zbiorem, zwanym dalej zbiorem wierzchołków grafu (V,E),*
- *$E \subseteq V \times V$ będziemy nazywać zbiorem krawędzi w (V,E).*

Dla dowolnych $x, y \in V$ jeśli $(x,y) \in E$ to tak ja wcześniej wspomnieliśmy (x,y) jest krawędzią w grafie skierowanym. Oczywiście nie mamy pewności czy wtedy $(y,x) \in E$, wtedy x jest początkiem krawędzi a y jej końcem (czy też grotem strzałki (x,y)).

Powiemy, że dany ciąg wierzchołków $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \in V^n$ jest ścieżką z v_0 do v_{n-1} w grafie (V, E), jeżeli dla każdego $k < n$ $(v_k, v_{k+1}) \in E$. Natomiast wspomniany ciąg wierzchołków jest ścieżką prostą, jeżeli $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ jest ścieżką i dla każdego $i, j < n-1$ jeśli $i \neq j \longrightarrow v_i \neq v_j$. Ponadto, jeżeli $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ jest ścieżką prostą i $v_0 = v_{n-1}$ to taką ścieżkę nazywamy cyklem w grafie (V, E).

Dla wygody, niech $V^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} V^n$ będzie zbiorem wszystkich skończonych ciągów o wyrazach będacych elementami zbioru V. Natomiast $\mathcal{S}(V, E)$ będzie zbiorem wszystkich ścieżek w grafie (V, E). Oczywiście mamy $\mathcal{S}(V, E) \subseteq V^{<\omega}$. Jeżeli wiadomo o jaki graf chodzi, to będziemy pisać zamiast $\mathcal{S}(V, E)$.

Przejdźmy do definicji drzewa skierowanego.

Definicja 5 (Drzewo skierowane)**.** *Powiemy, że* (V, E, V_0, v_0) *jest drzewem skierowanym jeżeli*

(1) (V, E) *jest grafem skierowanym,*
(2) $(\forall x, y \in V)\ (x, y) \in E \longrightarrow (y, x) \notin E,$
(3) $v_0 \in V,$
(4) $(\forall v \in V)\ (v \neq v_0 \longrightarrow (\exists (t_k)_{k<n} \in \mathcal{S})!)t_0 = v_0 \wedge t_{n-1} = v.$

Pierwszy warunek jest oczywisty, drugi mówi, że strzałki w grafie są tylko w jedną stronę, w szczególności nie ma strzałki $(v, v) \in E$. Ostatni warunek mówi, że do każdego wierzchołka v grafu (V, E) różnego od v_0 istnieje dokładnie jedna ścieżka prowadząca do v od v_0. Zauważmy, że wierzchołek o własnościach v_0 jest tylko jedyny, na mocy warunku drugiego. Taki wierzchołek nazywamy korzeniem drzewa (V, E). Liściem w drzewie (V, E, v_0) nazywamy wierzchołek $v \in V$ dla którego nie ma $v' \in V$ $(v, v') \in E$, (to znaczy, że nie ma krawędzi w (V, E) wychodzących z wierzchołka v). Oznaczmy przez $\mathcal{L}(V)$ jest zbiorem wszystkich liści w drzewie (V, E, v_0).

Przykład 1. *Rozważmy przykład prostej gry. Niech będzie dana tablica* 2×2 *o polach ponumerowanych kolejno* $1, 2, 3, 4$*. Jest dwóch graczy A, E Gra polega na naprzemiennym wybieranych pól tablicy przez graczy A i E. Grę zaczyna gracz A. Gra polega na następujących zasadach:*

- *gracze wybierają pola, które nie zostały wybrane,*
- *jeżeli zostało wybrane pole* 2 *lub pole* 3*, to nie można wybrać pola o numerze* 4*.*
- *jeżeli któryś gracz wybrał pole o numerze* 1 *to przegrwa grę (drugi wygrywa).*

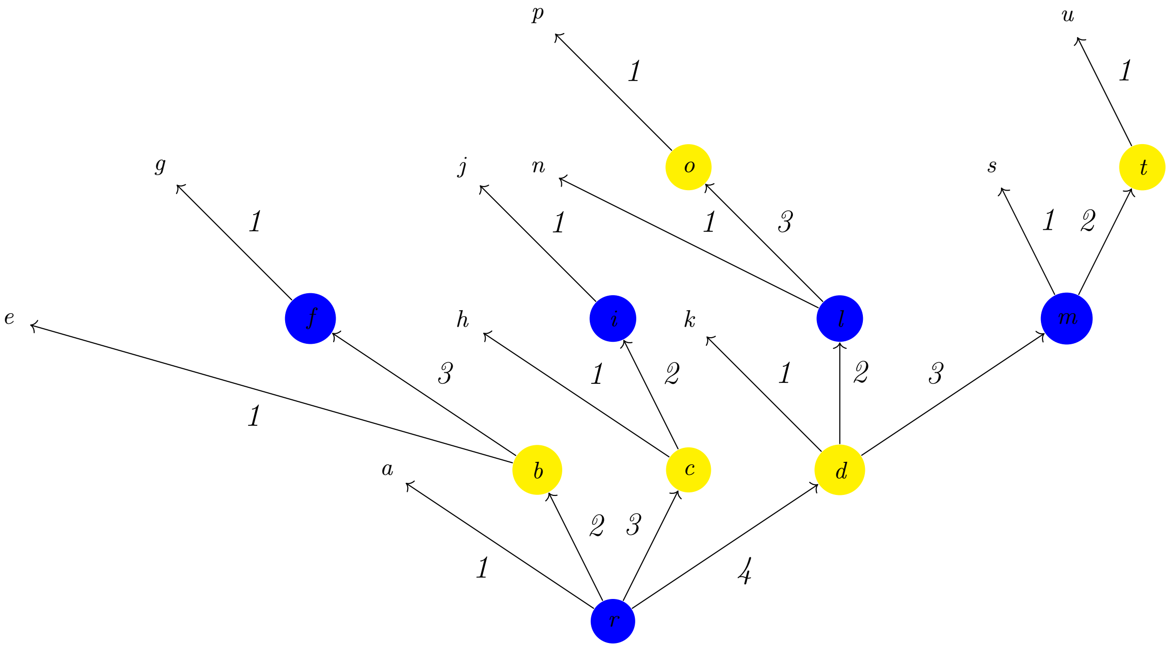
2	*4*
1	*3*

Z powyższą grą, można związać drzewo skierowane $T = (V, E, r)$ *następująco:*

- $V = \{r, a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
- $E = \{(r, a), (r, b), (r, c), (r, d), \}$.

Wszystkie wierzchołki w T, które nie są liścmi oznaczone są przez gracza A lub E, który ma aktualnie ruch. Korzeń r jest oznaczony literą A. Wierzchołki drzewa T, które są liścmi w

T oznaczone są wynikiem naszej gry (A wygrywa lub B wygrywa). Krawędzie wychodzące z wierzchołka r oznaczają możliwy pierwszy ruch gracza A, krawędzie wychodzące z wierzchołków a, b, c, d oznaczają pierwszy ruch gracza E itd. Każda z krawędzi drzewa T jest oznaczona numerem wybranego gracza. Opisaną sytuację możemy przedstawić graficznie, patrz rys. 1 .



Rysunek 1. Graficzne przedstawienie gry.

Teraz jesteśmy gotowi do wprowadzenia pojęcia **rozszerzonej postaci gry** i jej podgry.

Definicja 6 (Rozszerzona postać gry (RPG))**.** *Powiemy, że $\Gamma = (N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, \mathcal{O}, u)$ jest rozszerzoną postacią gry jeśli spełnione są warunki*

(1) *N jest zbiorem graczy (zazwyczaj skończony),*
(2) *(V, E, x_0) jest skierowanym drzewem,*
(3) *$(V_i)_{i\in N}$ jest partycją zbioru $V \setminus \mathcal{L}(V)$,*
(4) *$\mathcal{O}$ jest zbiorem wyników gry,*
(5) *$u : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{O}$ jest wypłatą gry.*

Definicja 7 (Podgra gry)**.** *Niech $\Gamma = (N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, \mathcal{O}, u)$ jest rozszerzoną postacią gry, $x \in V$. Wtedy $\Gamma(x) = ((N_x.V(x), E(x), x, V_i(x)_{i\in N_x}, \mathcal{O}_x, u_x)$ jest podgrą gry Γ jeżeli:*

(1) $N_x = N$,
(2) $V(x) = \{y \in X : \ x \leq y \vee y = x\}$,
(3) $E(X) = E \cap (V \times V)$,
(4) $(\forall i \in N)(V_i(x) = V_i \cap V(x))$,
(5) $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}$,
(6) $u_x = u \restriction (\mathcal{L}(V) \cap V(x))$.

Zauważmy, że $\Gamma(x_0) = \Gamma$.

Wporst z definicji rozszerzonej postacii gry i jej podgry mamy nastepujacy fakt.

Fakt 1. *Niech* $\Gamma = (N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, \mathcal{O}, u)$ *bedzie rozszerzoną postacią gry,* $x \in V$*, to podgra* $\Gamma(x)$ *gry* Γ *jest rozszerzoną postacią gry.*

Ważnym pojęciem jest strategie gracza w grze. Opisowo rzecz ujmujac, jest to sposób postepowania wybranego gracza majace na celu sięgnięcia najlepszego wyniku dla niego wdanej grze.

Definicja 8 (Strategia gracza)**.** *Niech* $\Gamma = (N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, \mathcal{O}, u)$ *będzie rozszerzoną postacią gry,* $i \in N$ *ustalony jej gracz. Wtedy kazdą funkcję* $s : V_i \to V$ *nazywamy strategią gracza* i*, jeżeli*

$$(\forall x \in V_i)\ (s(x) \in succ(x)).$$

Natomiast wektor strategii $s = (s_i)_{i\in N}$ *jeżeli każde* s_i *jest strategią gracza* i*.*

Ponieważ $(V_i)_{i\in N}$ jest partycją $V \setminus \mathcal{L}(V)$, to $s = \bigcup_{i\in N}$ jest funkcją taką, że $dom(s) = \bigcup_{i\in N} dom(s_i)$ i $rng(s) \subseteq V$. Zakładając, ze V jest zbiorem skończonym, istnieje takie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, że

$$\underbrace{s \circ \cdots \circ s}_{n \text{ razy}}(x_0) \in \mathcal{L}(V) = dom(u).$$

Wtedy s wyznacza konkretną rozgrywkę oraz $u(\underbrace{s \circ \cdots \circ s}_{n \text{ razy}}(x_0)) \in \mathcal{O}$ jest wynikiem rozgrywki zadanej przez wektor strategii s. W takiej sytuacji czesto będziemy pisać $u(s)$ zamiast $\underbrace{s \circ \cdots \circ s}_{n \text{ razy}}(x_0)$.

Definicja 9 (Strategia wygrywająca)**.** *Niech* $\Gamma = (N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, \mathcal{O}, u)$ *będzie rozszerzoną postacią gry,* $N = \{I, II\}$*,* $\mathcal{O} = \{I\!-\!wygrywa, II\!-\!wygrywa, remis\}$*. Wtedy strategia* s_I *I-go gracza jest wygrywająca jeżeli*

$$(\forall s_{II}) s_{II} \textit{ jest strategią gracza } II \longrightarrow u(s_I, s_{II}) = I - \textit{ wygrywa}.$$

Powiemy, że stratedia s_I *gwarantuje przynajmniej remis graczowi* I *jeżeli*

$$(\forall s_{II}) s_{II} \textit{ jest strategią gracza } II \longrightarrow u(s_I, s_{II}) \in \{I - \textit{ wygrywa }, \textit{ remis}\}.$$

Analogicznie definiujemy strategię wygrywającą jak i strategię gwarantującą remis dla gracza II*.*

Jesteśmy gotowi do sformułowanie i dowodu jednego z najważniejszych rezultatów teorii gier. Jest to twierdzenie von Neumanna, które otworzyło podwoje do pieknej i bardzo użytecznej matematycznej teorii.

Twierdzenie 3 (Jhon von Neumann, 1928)**.** *Niech* $\Gamma = (N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, \mathcal{O}, u)$ *będzie rozszerzoną postacią gry taką że*

- $N = \{I, II\}$ *i* V *są skończony,*
- $\mathcal{O} = \{I - wygrywa, II - wygrywa, remis\}$*.*

Wtedy zachodzi jedna z alternatyw:

(1) *gracz I ma strategię wygrywającą w grze Γ,*
(2) *gracz II ma strategię wygrywającą w grze Γ,*
(3) *gracz I i II mają strategię gwaruntującą przynajmniej remis w grze Γ.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem mocy $V(x)$ w zadanej podgrze $F(x)$ gry Γ. Załóżmy, $x \in G$ jest taki, że $|V(x)| = 1$, to $x \in \mathcal{L}(V)$, $u(x) \in \mathcal{O}$ więc teza dla $\Gamma(x)$ zachodzi (wtedy $s_{I,\gamma(x)} = s_{II,\Gamma(x)} = \emptyset$).

Załóżmy więc, że $|V(x)| > 1$ oraz dla każdego $y \in succ(x)$ zachodzi teza w grze $\Gamma(y)$. Bez straty ogólności, możemy założyć, że $x \in V_I$ (gracz I ma ruch z węzła x). Rozważymy trzy przypadki:

$(\exists y \in succ(x))(\exists s_{I,\Gamma(y)})$ $(s_{I,\gamma(y)}$ ma strategię wygrywającą w $\Gamma(y))$: niech $y_0 \in succ(x)$, $s_{I,\Gamma(y_0}$ jest strategią wygrywająca dla gracza I w grze $\Gamma(y_0)$. Wtedy

$$s_{I,\Gamma(x)} = \bigcup_{y \in succ(x)} s_{I,\Gamma(y)} \cup \{(x, y_0)\}$$

jest strategią wygrywającą dla gracza I w grze $\Gamma(x)$,

$(\forall y \in succ(x))(\exists s_{II,\Gamma(y)})$ $(s_{II,\gamma(y)}$ ma strategię wygrywającą w $\Gamma(y))$: wówczas

$$s_{II,\Gamma(x)} = \bigcup_{y \in succ(x)} s_{II,\Gamma(y)}$$

jest strategią wygrywającą dla gracza II w grze $\Gamma(x)$,

nie zachodzą powyższe warunki: wtedy dla każdego $y \in succ(y)$ nie istnieję strategia wygrywająca $s_{I,\Gamma(y)}$ dla gracza I w grze $\Gamma(y)$ i istnieje $y_0 \in succ(x)$ takie, że obydwaj gracze mają strategie $s_{I,\Gamma(y_0)}, s_{II,\Gamma(y_0)}$, które gwarantują przynajmniej remis. Zauważmy, że poniższe strategie

$$s_{I,\Gamma(x)} = \bigcup_{y \in succ(x)} s_{I,\Gamma(y)} \cup \{(x, y_0)\},$$

$$s_{II,\Gamma(x)} = \bigcup_{y \in succ(x)} s_{II,\Gamma(y)},$$

gwarantują przynajmniej remis odpowiednio graczowi I jak i II.

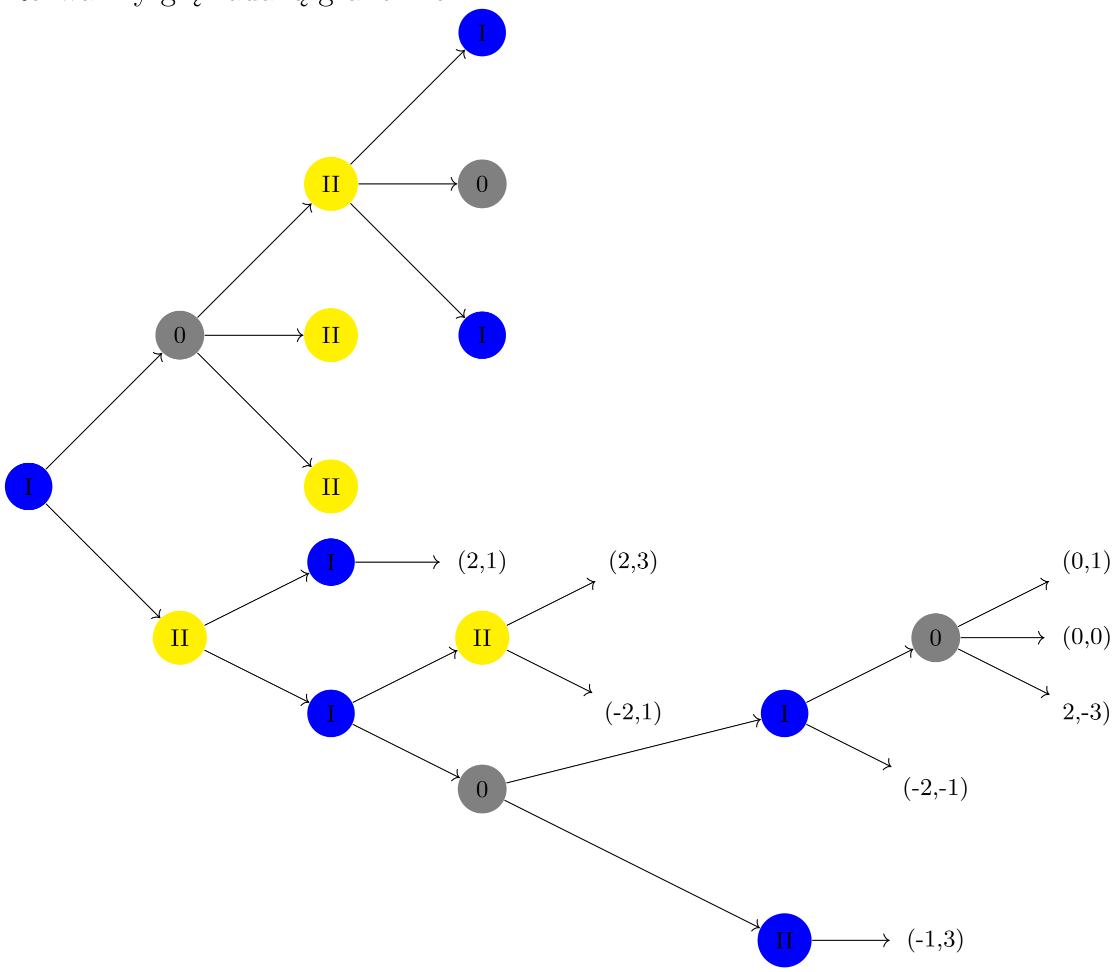
Stosując zasadę skończonej indukcji matematycznej, to dla każdego $x \in V$ mamy prawdziwą tezę twierdzenia w grze $\Gamma(x)$. Ponieważ w szczególności twierdzenie jest prawdziwe dla gry $\Gamma(x_0)$ i $\Gamma(x_0) = \Gamma$, to twierdzenie jest prawdziwe dla gry Γ. □

W praktyce, często się zdarza, że czynnik losowy odgrywa istotną rolę. W teorii gier, również jest to uwzględnione. W takim przypadku wprowacza się specjalnego gracza (często zwanego *naturą*. Każda krawędź wierzchołka w którym własnie ten specjalny gracz ma ruch jest oznaczona miarą prawdopodobieństwa wyboru tejże krawędzi. Tak więc z każdym takim wierzchołkiem jest związany rozkład prawdopodobieństwa wyboru danej krawędzi. Podamy aksjomatyczną wersję gry z przypadkowymi ruchami.

Definicja 10 (Rozszerzona wersja gry z przypadkowymi ruchami)**.** *Powiemy, że krotka* $\Gamma = (N, 0, V, E, x_0, (V_i)_{i \in N \cup \{0\}}, (p_x)_{x \in V_0}, \mathcal{O}, u)$ *jest rozszerzoną postacią gry z przypadkowymi ruchami jeśli:*

(1) N*-zbiór skończony i* $0 \notin N$,
(2) (V, E, x_0) *jest drzewem skierowanym,*
(3) $\{V_i : i \in N \cup \{0\}\}$ *jest partycją* $V \setminus \mathcal{L}(V)$,
(4) $(\forall x \in V_0)$ p_x *jest rozkładem prawdopodobieństwa na* $succ(x)$,
(5) $\mathcal{O}$ *jest zbiorem wyników gry* Γ,
(6) $u : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{O}$ *jest funkcją wypłaty.*

Rozważmy grę zadaną graficznie:



3. Gry w postaci strategicznej

W poprzednich wykładach rozważaliśmy gry w postaci rozszerzonej. W takich grach podstawowym pojeciem jest drzewo gry, które jest drzewem skierowanym z ustalonym korzeniem. Każdy węzeł, który nie jest liściem jest przypisany do ustalonego gracza. Ważnym elementem takiej postaci gry jest strategia, tzn. funkcje która jest okreslona na węzłach nie bedących liścmi o wartościach w następnikach węzłów.

Czasami wygodniej odejść od tak wielu szczegółów i skupić się tylko na wybranych aspektach gry. Wprowadzimy nowe ującie gry, które nazywać będziemy strategiczną postacią gry.

Definicja 11 (Strategiczna postać gry). *Dana trójka* $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ *jest strategiczną postacją gry jeżeli:*

1. N *jest niepustym zbiorem,*
2. $(\forall i \in N)S_i$ *jest zbiorem strategii gracza* i*,*
3. $(\forall i \in N)u_i : \prod_{k\in N} S_k \to \mathbb{R}$ *jest funkcją wypłaty* i*-tego gracza.*

Przykład 2. *Rozważmy nastepującą grę dwuosobową,* $N = \{1, 2\}$*,* $_1 = \{H, T\}$*,* $S_2 = \{L, R\}$*. Niech funkcja wypłaty (a własciwie wektor funkcji) zdefiniowana następująco: wypłata gracza* 1 $u_1(H, L) = 4$, $u_1(H, R) = 0$, $u_1(T, L) = 1$, $u_2(T, R) = 3$, *oraz wypłata gracza* 2 $u_2(H, L) = 2$, $u_2(H, R) = 1$, $u_2(T, L) = 1$, *i* $u_2(T, R) = 3$. *Grę możemy przedstawić w postaci tabelki (stąd takie gry nazywamy grami macierzowymi) zamieszczonej poniżej:*

	L	R
H	*4, 2*	*0, 1*
T	*1, 1*	*3, 3*

W każdym polu powyższej tabelki wystepuje para liczb. Pierwsza z z nich jest wartością wypłaty pierwszego gracza a druga liczba jest wypłatą dla drugiego gracza.

Wprowadzimy nastepujacą notację, dla zadanej rodziny zbiorów $\{X_i : i \in N\}$ indeksowanej zbiorem N oraz $i \in N$ definiujemy

$$X = \prod_{i\in N} X_i, \qquad X_{-i} = \prod_{j\in N\setminus\{i\}} X_j.$$

Nastepnie przyjmiemy, że s_{-i} będzie elementem zbioru X_{-i}.

Niech będzie dana gra $\Gamma = ((N, (N_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ w postaci strategicznej. Wtedy zbiór $S = \prod_{i\in N} S_i$ będzie przestrzenią strategii w grze Γ a każde $s \in S$ wektorem strategii w grze Γ.

W tym rozdziale rozważać będziemy jedynie takie gry w postaci strategicznej, które mają skończony zbiór graczy a przestrzeń strategii w takich grach będzie skończona.

Wprowadzimy jedno z najbardziej kluczowych pojęć w teorii gier, które było wprowadzone przez Jhona Nasha.

Definicja 12 (Równowaga Nasha). *Niech będzie dana gra* $\Gamma = (N, (N_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, N *zbiorem skończonym oraz* $s^* = (s^*_1, \ldots, s^*_{|N|}) \in S$ *będzie wektorem strategii. Wtedy* s^* *jest równowagą Nasha jeżeli*

$$(\forall i \in N)(\forall s_i \in S_i)u_i(s_i, s^*_{-i}) \leq u_i(s^*_i, s^*_{-i}).$$

Przez E_Γ *będziemy oznaczać zbiór wszystkich równowag Nasha w grze* Γ.

W przykładzie gry z Przykładu 2 mamy następujący zbiór wszystkich równowag Nasha

$$E_\Gamma = \{(H, L), (T_R)\}$$

Zauważmy, że jeżeli s jest równowagą Nasha, to możemy traktować s jako wektor, który opisuje w pewnym sensie stabilność. Mianowicie, jeżeli dowolny gracz zmieni strategię, podczas gdy pozostali gracze będą stosować strategię z wektora s, to wypłata tego gracz się nie zwiększy. Wtedy gracz i powinien przystać przy strategii z wektora s, który jest równowagą Nasha.

Mając daną grę Γ, zastanówmy się, jak powinien grać gracz $i \in N$ (to znaczy którą strategię wybrać) aby mieć pweność, że i-ty gracz nie otrzyma mniej niż pewna liczba rzeczywista, niezależnie od tego jaką strategię wybiorą pozostali gracze. Załóżmy, że gracz $i \in N$ wybrał strategię $s_i \in S_i$. Wtedy, niezależnie jaką zastosuja strategię pozostali gracze, nasz gracz otrzyma wypłatę przynajmniej równą $\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$. Ponieważ gracz $i \in N$ ma do dyspozyji jeszcze inne swoje strategie, może wygrać taką $s_i^* \in S_i$, przy której wielkość jego wypłaty wśród zbioru $\{\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) : s_i \in S_i\}$ będzie największa, tzn. że zachodzi równość

$$\min_{s_{-i}^* \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Strategię s_i^* nazywamy strategią max min gracza $i \in N$ i jest największą jego gwarantowaną wypłatą. Dla dowolnego gracza $i \in N$ liczbę

$$\underline{v_i} = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$$

będziemy nazywać dolną wartością gracza $i \in N$ w grze Γ.

W grze z Przykładu 2 strategia T jest jedyną strategią max min gracza 1, natomist obydwie strategie L i R są strategiami max min gracza 2. W tym przykładzie, gwarantowane największe wypłaty dla obydwu graczy są równe i wynoszą 1.

Nastepujacy wniosek pokazuje związek ilościowy pomiedzy wektorem strategii max min a równowagą Nasha.

Twierdzenie 4. *Niech będzie dana równowaga Nasha S^* w strategicznej postaci gry Γ to wtedy* $(\forall i \in N)\ \underline{v_i} \leq u_i(s^*)$.

Dowód. Niech $s^* = (s_1^*, \dots, s_{|N|}^*) \in S$ będzie równowagą Nasha w grze Γ. Niech będzie dane $i \in N$, wtedy dla dowolnego $s_i \in S_i$ mamy

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i, s_{-i}^*) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}^*) = u_i(s^*).$$

Wyrażenie po prawej stronie powyższego wzoru nie zależy od wyboru strategii s_i, więc mamy

$$\underline{u_i} = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \leq u_i(s^*).$$

Ponieważ $i \in N$ było wybrane w sposób dowolny, wiec nasze twierdzenie zostało udowodnione. □

W ielu grach istnieja pewne strategie graczy uczestniczących w tych grach, które z jakiegos powodu nie opłaca się wybierać, bo nie zwiekszają korzyści w postaci wypłaty tych graczy. Przykładami takich strategii sa tak zwane strategie zdominowane.

Definicja 13 (Strategia zdominowana). *Niech będzie dana gra Γ w postaci strategicznej, oraz bedzie dana strategia $\widehat{s_i}$ gracza $i \in N$. Powiemy, że ta strategia jest* **silnie zdominowana** *w grze Γ jezeli istnieje inna strategia t_i gracza $i \in N$ taka, że*

$$(\forall s_{-i} \in S_i)\; u_i(\widehat{s_i}, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i}).$$

Wtedy dla takiego t_i mówimy, że $\widehat{s_i}$ jest silnie zdominowana przez t_i albo, że t_i silnie dominuje $\widehat{s_i}$.

Natomiast, powiemy, że $\widehat{s_i}$ jest **słabo zdominowana** *albo* **zdominowana** *w grze Γ jeżeli istnieje $t_i \in S_i \setminus \{\hat{s}_i\}$ takie, że*

(1) $(\forall s_{-i} \in S_i)\; u_i(\widehat{s_i}, s_{-i}) \leq u_i(t_i, s_{-i})$,
(2) $(\exists t_{-i} \in S_{-i})\; u_i(\widehat{s_i}, t_{-i}) < u_i(t_i, t_{-i})$.

Wtedy dla takiego t_i mówimy, że $\widehat{s_i}$ jest zdominowana przez t_i albo, że t_i dominuje $\widehat{s_i}$.

Zauważmy, że każda strategia silnie zdominowana jest strategią słabo zdominowaną. Dla wygody, wprowadzimy pojecie redukcji gry (zwanej również grą zredukowaną).

Definicja 14 (Redukcja gry). *Niech będzie dana gra $\Gamma = (N, (N_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, to gra $\widehat{\Gamma} = (N, (\widehat{S_i})_{i\in N}, (\widehat{u_i})_{i\in N})$ jest redukcja gry Γ jeżeli dla każdego $i \in N$ zachodzi:*

(1) $\widehat{S_i} \subseteq S_i$,
(2) $\widehat{u_i} = u_i \restriction \widehat{S}$, *gdzie* $\widehat{S} = \prod_{j\in N} \widehat{S}_j$.

Ponieważ każda wypłata $\widehat{u_i}$ jest zawężeniem wypłaty u_i do zbioru $\widehat{S}$, to o ile nie bedzie to prowadzić do niejasności, to będziemy opuszczać daszek w wypłacie z zredukowanej gry.

Jeżeli mamy zadaną grę Γ oraz ustaloną strategię s_i gracza $i \in N$, to redukcję gry Γ o strategię s_i nazywamy taką redukcję $\widehat{\Gamma}$ dla której zachodzi

$$(\forall j \in N)\;\; \widehat{S}_j = \begin{cases} S_j & j \neq i \\ S_i \setminus \{s_i\} & j = i. \end{cases}$$

Nastepujace twierdzenie mówi, że jeżeli z gry Γ usuniemy strategię zdominowana $\widehat{s_i}$ i-tego gracza, to dolna wartość gracza $i \in N$ nie zmieni się.

Twierdzenie 5. *Niech będzie dana gra strategiczna Γ, oraz niech $\widehat{s_i}$ dla $i \in N$ będzie ustaloną zdominowaną strategią gracza $i \in N$. Niech $\widehat{\Gamma}$ będzie redukcją gry Γ o strategię $\widehat{s_i}$ oraz $\underline{v_i^{\Gamma}}$ i $\underline{v_i^{\widehat{\Gamma}}}$, to $\underline{v_i^{\Gamma}} = \underline{v_i^{\widehat{\Gamma}}}$.*

Dowód. Zauważmy, że $\widehat{S_i} = S_i \setminus \{s_i\}$ oraz $\widehat{S_{-i}} = S_{-i}$. Więc mamy

$$\begin{aligned}
\underline{v_i^{\Gamma}} &= \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \\
&= \max\{\max_{s_i \in S_i \setminus \{\widehat{s_i}\}} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}), \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\widehat{s_i}, s_{-i})\} \\
&= \max\{\max_{s_i \in \widehat{S}_i} \min_{s_{-i} \in \widehat{S_{-i}}} u_i(s_i, s_{-i}), \min_{s_{-i} \in \widehat{S_{-i}}} u_i(\widehat{s_i}, s_{-i})\} \\
&= \max_{s_i \in \widehat{S}_i} \min_{s_{-i} \in \widehat{S_{-i}}} u_i(s_i, s_{-i}) = \underline{u_i^{\widehat{\Gamma}}}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\widehat{s_i}$ jest strategią zdominowaną, to jest strategia $t_i \in S_i$, różna od $\widehat{s_i}$ taka, że

$$(\forall s_{-i} \in S_{-i}) u_i(\widehat{s_i}, s_{-i}) \leq u_i(t_i, s_{-i}),$$

więc

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\widehat{s_i}, s_{-i}) \leq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(t_i, s_{-i}) \leq \max_{s_i \in \widehat{S}_i} \min_{s_{-i} \in \widehat{S_{-i}}} u_i(s_i, s_{-i})$$

a stąd przejście do ostatniej linii jest poprawne. □

Może się zdarzyć, że jeżeli w danej grze Γ mamy równowagę Nasha s^* i jeżeli wykonamy redukcją gry Γ do $\widehat{\Gamma}$ o jakąś zdominowaną strategię, to w nowej grze nie będzie wektora strategii s^*. Jeżeli jednak taki wektor jest w zmodyfikowanej grze, to dalej pozostaje równowagą Nasha.

Twierdzenie 6. *Niech Γ będzie grą strategiczną a $s^* \in S$ równowagą Nasha w grze Γ. Załóżmy, że $\widehat{\Gamma}$ jest redukcją gry Γ i $s^* \in \widehat{S}$, to s^* jest równowagą Nasha w grze $\widehat{\Gamma}$.*

Dowód. Niech $s^* \in E_\Gamma$ oraz $s^* \in \widehat{S}$ i załóżmy, że $\widehat{\Gamma}$ jest redukcją gry Γ. Udowodnimy, że $s^* \in E_{\widehat{\Gamma}}$. Ponieważ $s^* \in E_\Gamma$, to wtedy

$$(\forall j \in N)(\forall s_j \in S_j) u_j(s_j, s^*_{-j}) \leq u_j(s^*_j, s^*_{-j}) = u_j(s^*).$$

Ponieważ dla każdego $j \in N$ $\widehat{S}_j \subseteq S_j$ i $s^*_j \in \widehat{S}_j$, to mamy

$$(\forall j \in N)(\forall s_j \in \widehat{S}_j) u_j(s_j, s^*_{-j}) \leq u_j(s^*_j, s^*_{-j}) = u_j(s^*).$$

Więc $s^* \in E_{\widehat{\Gamma}}$. □

Twierdzenie 7. *Jeżeli $\widehat{\Gamma}$ jest redukcją gry Γ o zdominowaną strategię $\widehat{s_i}$ i s^* jest równowagą Nasha w grze $\widehat{\Gamma}$, to s^* jest też równowagą Nasha w grze Γ, (tzn. $E_{\widehat{\Gamma}} \subseteq E_\Gamma$).*

Dowód. Niech s^* będzie równowagą Nasha w grze zredukowanej o zdominowaną strategię $\widehat{s_i}$ ustalonego gracza $i \in N$. Wtedy $s^* \in \widehat{S}$ oraz

$$(\forall j \in N)(\forall s_j \in \widehat{S}_j) u_j(s_j, s^*_{-j}) \leq u_j(s^*).$$

Jeżeli $j \neq i$, to wtedy $S_j = \widehat{S}_j$ i mamy

$$(\forall j \in N \setminus \{i\})(\forall s_j \in S_j) u_j(s_j, s^*_{-j}) \leq u_j(s^*).$$

Rozważmy przypadek $j = i$. Wtedy $\widehat{S}_i = S_i \setminus \{\widehat{s_i}\}$. Niech $s_i \in S_i$, jeżeli $s_i \neq \widehat{s_i}$, to wtedy $s_i \in \widehat{S}_i$ i wtedy na mocy faktu, że $s^* \in E_{\widehat{\Gamma}}$ mamy nierówność

$$u_i(s_i, s^*_{-i}) \leq u_i(s^*).$$

Załóżmy więc, że $s_i = \widehat{s_i}$. Ponieważ $\widehat{s_i}$ jest strategią zdominowaną w grze Γ, to jest $t_i \neq \widehat{s_i}$ takie, że $t_i \in S_i$ oraz

$$(\forall t_{-i} \in S_{-i}) u_i(\widehat{s_i}, t_{-i}) \leq u_i(t_i, t_{-i}).$$

Zauważmy, że $\widehat{S_{-i}} = S_{-i}$ i $t_i \in \widehat{S}_i$, to kładąc $t_{-i} = s^*_{-i}$ dostajemy

$$u_i(\widehat{s_i}, s^*_{-i}) \leq u_i(t_i, s^*_{-i}) \leq u_i(s^*).$$

Tak więc udowodniliśmy

$$(\forall j \in N)(\forall s_j \in S_j)\ u_j(s_j, s^*_{-j}) \leq u_j(s^*)$$

a stąd mamy $s^* \in E_\Gamma$.

□

Twierdzenie 8. *Jeżeli $\widehat{\Gamma}$ jest redukcją gry Γ o silnie zdominowaną strategię, to $E_\Gamma = E_{\widehat{\Gamma}}$.*

Dowód. Niech $\widehat{\Gamma}$ będzie redukcja gry Γ o silnie zdominowaną strategię $\widehat{s_i}$ pwenego gracza $i \in N$. Ponieważ strategia silnie zdominowana w Γ jest strategią zdominowaną w grze Γ, więc na mocy poprzedniego twierdzenia mamy $E_{\widehat{\Gamma}} \subseteq E_\Gamma$. Udowodnimy inkluzję przeciwną pomiędzy E_Γ a $E_{\widehat{\Gamma}}$. Niech $s^* \in E_\Gamma$, wtedy na mocy Twierdzenia 6 wystarczy pokazać, że $s^* \in \widehat{S}$. Zauważmy, że dla $j \neq i$ $\widehat{S_j} = S_j$ a stąd $s^*_j \in \widehat{S_j}$. Niech $j = i$. Ponieważ $\widehat{S_i} = S_i \setminus \{\widehat{s_i}\}$ oraz $\widehat{s_i}$ jest strategią silnie zdominowaną, to istnieje takie $t_i \in S_i$, że

$$(\forall t_{-i} \in S_{-i}) u_i(\widehat{s_i}, t_{-i}) < u_i(t_i, t_{-i}).$$

Kładąc $t_{-i} = s^*_{-i}$ i korzystając z faktu, że $s^* \in E_\Gamma$ mamy

$$u_i(\widehat{s_i}, s^*_{-i}) < u_i(t_i, s^*_{-i}) \leq u_i(s^*_i, s^*_{-i}) = u_i(s^*).$$

Ponieważ pomiędzy lewą stroną i prawą stroną powyższego wzoru zachodzi ostra nierówność, to $\widehat{s_i} \neq s^*_i$ a stąd $s^*_i \in \widehat{S_i}$. Pokazaliśmy więc, że $s^* \in \widehat{S}$ i wiemy że $s^* \in E_\Gamma$, więc z Twierdzenia 6 mamy $s^* \in E_{\widehat{\Gamma}}$. Ostatecznie mamy $E_\Gamma \subseteq E_{\widehat{\Gamma}}$ i $E_{\widehat{\Gamma}} \subseteq E_\Gamma$. Twierdzenie zostało udowodnione. □

Niech będą dwie gry w postacii strategicznej Γ i Γ'. Powiemy, że Γ jest iteracyjnie zredukowana do gry Γ' (Γ' jest iteracyjną redukcją gry Γ), jeżeli istnieje skończony ciąg gier $(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{n-1})$ taki, że

(1) $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_{n-1} = \Gamma'$,
(2) dla kazdego $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ Γ_{i+1} jest redukcją gry Γ_i.

Wniosek 1. *Jeżeli Γ' jest iteracyjną redukcją gry Γ o silnie zdominowane strategie oraz przestrzeń strategii S'_Γ jest jedno elementowa, to w grze Γ istnieje jedyna równowaga Nasha oraz dla $s^* \in S_{\Gamma'}$ zachodzi równość*

$$E_\Gamma = E_{\Gamma'} = S_{\Gamma'} = \{s^*\}.$$

4. Gry z sumą zerową

Definicja 15 (Gra z sumą zerową). *Niech $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ jest strategiczną postacią gry, to powiemy, że Γ jest N-osobową grą z $\Sigma = 0$ (z sumą zerową) jeżeli N jest zbiorem skończonym i*

$$\left(\forall s \in \prod_{i\in N}\right) \sum_{i\in N} u_i(s) = 0.$$

W dalszej części będziemy rozważać gry z sumą zerową dla $N = \{1, 2\}$.

Definicja 16. *Niech bedzie dana 2-osobowa gra z sumą zerową Γ, to definiujemy $u = u_i$ oraz*

(1) $\underline{v} = \underline{v_1} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2)$ - *dolna wartość gry* Γ,
(2) $\overline{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$ - *górna wartość gry* Γ.

Powiemy, że liczba rzeczywista v *jest wartością gry* Γ, *jeżeli* $v = \underline{v} = \overline{v}$.

Powiemy, że strategie $s_1^* \in S_1$ i $s_2^* \in S_2$ są optymalne jeżeli

$$\underline{v} = \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2)$$

oraz

$$\overline{v} = \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*).$$

Mamy następujacy fakt

Twierdzenie 9. *Niech* Γ *będzie* 2 *osobową grą z sumą zerową, to*

$$\underline{v} \leq \overline{v}.$$

Dowód. Zauważmy, że dla strategii $s_1^* \in S_1$ jest strategią optymalną, to

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min s_2 \in S_2 \leq \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2).$$

Z drugiej strony, dla każdego $s_2 \in S_2$ mamy $u(s_1^*, s_2) \leq \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$. Korzystając z poprzedniej nierówności mamy

$$\underline{v} \leq \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \leq \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) = \overline{v}.$$

□

W grach dwuosobowych o sumie zerowej istnieje ścisły związek pomiedzy równowagą Nasha a optymalnymi strategiami.

Twierdzenie 10. *Niech* Γ *będzie dana gra* 2 *osobowa o sumie zerowej o wartości* $v \in \mathbb{R}$. *Niech będa dwie strategie optymalne* $s_1^* \in S_1$ *i* $s_2^* \in S_2$, *wtedy*

(1) $v = u(s_1^*, s_2^*)$,
(2) $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ *jest równowagą Nasha.*

Dowód. Niech v będzie wartością gry Γ a s_1^*, s_2^* będą strategiami optymalnymi. Zauważmy, że dla s_1^* mamy

$$v = \underline{v} = \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2)$$

więc

$$(\forall s_2 \in S_2)\ v \leq u(s_1^*, s_2).$$

Analogicznie,

$$v = \overline{v} = \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*),$$

a stąd

$$(\forall s_1 \in S_1)\ u(s_1, s_2^*) \leq v.$$

Korzystając z pierwszej i drugiej nierówności mamy

$$v \leq u(s_1^*, s_2^*) \leq v,$$

co dowodzi pierwszej części twierdzenia.

Powyższe dwie nierówności napiszmy w następujacej postaci:

$$(\forall s_2 \in S_2)\ u(s_1^*, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2)$$

i

$$(\forall s_1 \in S_1)\ u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*).$$

W rezultacie mamy

$$(\forall s_2 \in S_2)\ u_2(s_1^*, s_2) = -u(s_1^*, s_2) \leq -u(s_1^*, s_2^*) = u_2(s_1^*, s_2^*),$$

podobnie

$$(\forall s_1 \in S_1)\ u_1(s_1, s_2^*) = u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) = u_1(s_1^*, s_2^*).$$

Udowodniliśmy więc, że (s_1^*, s_2^*) jest równowagą Nasha w grze Γ. □

Twierdzenie 11. *Niech Γ będzie dwuosobową grą o sumie zerowej, $s^* = (s_1^*, s_1^*)$ będzie równowagą Nasha w grze Γ. Wtedy*

(1) *$v = u(s_1^*, s_2^*)$ jest wartością gry Γ,*
(2) *s_1^*, s_2^* są strategiami optymalnymi w grze Γ.*

Dowód. Wiedząc, że (s_1^*, s_2^*) jest równowagą Nasha, otrzymujemy

$$(\forall s_1 \in S_1)\ u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*)$$

a stąd

$$\max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*).$$

Analogicznie, dla każdego $s_2 \in S_2$ $u_2(s_1^*, s_2) \leq u_2(s_1^*, s_2^*)$ co daje

$$(\forall s_2 \in S_2)\ u(s_1^*, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2)$$

wiec

$$u(s_1^*, s_2^*) \leq \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2).$$

Zatem mamy

$$\overline{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) \leq u(s_1^*, s_2^*)$$

$$u(s_1^*, s_2^*) \leq \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \underline{v}.$$

Dostajemy $u(s_1^*, s_2^*) \leq \underline{v} \leq \overline{v} \leq u(s_1^*, s_2^*)$, co dowodzi pierwszej częsci twierdzenia. Następnie, udowodnimy, że s_1^*, s_2^* są strategiami optymalnymi w grze Γ. W tym celu zauważmy, że

$$\underline{v} \geq \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) = \underline{v}$$

a więc $\underline{v} = \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2)$. Podobnie, ponieważ dla każdego $s_1 \in S_1$ zachodzi $u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*)$, to mamy

$$\overline{v} \leq \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) = \overline{v},$$

co daje $\overline{v} = \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*)$. □

Twierdzenie 12 (Kuhn)**.** *Każda skończona gra z pełną informacją (w postaci rozszerzonej) ma równowagę Nasha.*

Dowód. Zastosujemy indukcję matematyczną względem mocy drzewa gry. Niech

$$\Gamma = (N, 0, V_\Gamma, E_\Gamma, v_0, (V_i)_{i\in N}, (p_x)_{x\in V_0}, \mathbb{R}, u)$$

będzie rozszerzoną postacią gry przypadkowymi ruchami. Załózmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdej gry Γ' z przypadkowymi ruchami dla której $|V_{\Gamma'}| < |V_\Gamma|$. Załóżmy, że $|V_\Gamma| = 1$, wtedy dla każdego gracza $i \in N$ możemy założyć, że $S_i = \{\emptyset\}$. Więc $s^* = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$ jest równowagą Nasha w grze Γ. Niech $|V_\Gamma| > 1$, dla wierzchołka $v_0 \in V$ niech $succ(v_0) = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Ponieważ Γ jest grą z pełną informacją, to dla każdego $k \in \{1, \ldots, m\}$ $\Gamma(v_k)$ jest podgrą gry Γ i oczywiście $v_0 \notin V_{\Gamma(v_k)}$. Zauważmy, że $|V_{\Gamma(v_k)}| < |V_\Gamma|$ dla każdego $k \in \{1, \ldots, m\}$. Tak więc, możemy założyć, że w każdej podgrze Γ_{v_k} istnieje równowaga Nasha s^{k*}. Mamy dwa przypadki, mianowicie $v_0 \in V_0$ albo $v_0 \notin V_0$.

Rozważmy przypadek $v_0 \in V_0$. Wtedy z wierzchołka v_0 możemy dojść do v_k w sposób losowy z prawdopodobieństwem p_k ($k \in \{1, \ldots, m\}$). W k-tym wierzchołku niech $s^{k*} = (s_1^{k*}, \ldots, s_N^{kX})$ będzie równowagą Nasha w grze $\Gamma(v_k)$. Dla $i \in N$ niech $s_i^* = \bigcup_{k=1}^m s_i^{k*}$ będzie strategią gracza $i \in N$ w grze Γ. Ponieważ s^{k*} jest równowagą Nasha w $\Gamma(v_k)$ to wtedy

$$(\forall s_i^k \in S_i^k)\; u_i^k(s_i^k, s_{-i}^{k*}) \leq u_i^k(s^{k*}).$$

Ponieważ w v_0 jest wykonywany ruch losowy, więc dla dowolnego $i \in N$ i $s_i \in S_i$ jeżeli s_i^k powstaje z s_i przez zawężenie jego dziedziny do drzewa $V_{\Gamma(v_k)}$, to mamy

$$u_i(s_i, s_{-1}^*) = \sum_{k=1}^m p_k \cdot u_i^k(s_i^k, s_{-i}^{k*}) \leq \sum_{k=1}^m p_k \cdot u_i^k(s_i^{k*}, s_{-i}^{k*}) = u_i(s^*),$$

co dowodzi, że s^* jest równowagą Nasha w grze Γ.

Niech $v_0 \notin V_0$. załóżmy, że dla pewnego $i_0 \in N$ $v_0 \in V_{i_0}$. Teraz zdefiniujemy $s^* \in \prod_{i\in N} S_i$ w sposób następujący:

- $i \in N \setminus \{i_0\}$, to $s_i^* = \bigcup_{k=1}^m s_i^{k*}$.
- $i = i_0$, to $s_{i_0}^* = \bigcup_{k=1}^m s_{i_0}^{k*} \cup \{(v_0, v_{k_0})\}$, gdzie $k_0 \in \{1, \ldots, m\}$ oraz

$$u_{i_0}^{k_0}(s^{k_0*}) = \max\{u_{i_0}^k(s^{k*}) : \; k \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Udowodnimy, że s^* jest równowagą Nasha w grze Γ. Niech $i \in N$ takie, że $i \neq i_0$ oraz niech $s_i \in S_i$. Zauważmy, że zachodzi $s_1^* \cup \ldots \cup s_i \cup \ldots s_{i_0}^* \cup \ldots \cup s_{|N|}^*(v_0) \in V_{\Gamma_{k_0}}$ a stąd

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) = u_i^{k_0}(s_i^{k_0}, s_{-i}^{k_0*}) \leq u_i^{k_0}(s_i^{k_0*}, s_{-i}^{k_0*}) = u_i(s^*).$$

Przejdźmy do przypadku ostatniego, jakim jest $i = i_0$. Niech $s_{i_0} \in S_{i_0} \setminus \{s_{i_0}^*\}$. Mamy wtedy dwa przypadki, $s_{i_0}(v_0) \in V_{\Gamma(v_{k_0})}$ lub $s_{i_0}(v_0) \in V_{\Gamma(v_k)}$ i $k \neq k_0$. W pierwszym przypadku mamy

$$u_{i_0}(s_{i_0}, s_{-i_0}^*) = u_{i_0}^{k_0}(s_{i_0}^{k_0}, s_{-i_0}^{k_0*}) \leq u_{i_0}^{k_0}(s^{k_0*}) = u_{i_0}(s^*).$$

W drugim przypadku mamy

$$u_{i_0}(s_{i_0}, s_{-i_0}^*) = u_{i_0}^k(s_{i_0}^k, s_{-i_0}^{k*}) \leq u_{i_0}^k(s^{k*}) \leq u_{i_0}^{k_0}(s^{k_0*}) = u_{i_0}(s^*).$$

□

5. Gry ze strategiami mieszanymi

Ńie jest to szczególnie trudno znaleźć przykłady dwuosobowej gry z sumą zerową dla której nie istnieje wartość tej gry. Jeżeli te gry rozszerzymy do gier z tzw. strategiami mieszanymi, to wtedy wartości dolna i górna taiej gry są sobie równe. Jest to treść twierdzenia, ktore poraz pierwszy Jhon von Neumann sformułował w 1928 roku. Natomiast, w roku 1951 Jhon Nash udowodnił twierdzenie, które mówi o istnieniu równowagi Nasha nie tylko w przypadku dwuosobowych gier o sumnie zerowej. Twierdzenia Nasha stało się wynikiem o znaczeniu podstwowym we współczesnej teorii gier i stało się kanonem tej teorii.

Definicja 17 (Gra ze strategiami czystymi)**.** *Niech bedzie dana gra* $G = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ *w postaci strategicznej. Powiemy, że gra* G *jest grą z strategiami czystymi, jesli*

(1) N *jest zbiorem skończonym,*
(2) $(\forall i \in N)(|S_i| < \infty)$.

Definicja 18 (Gra z strategiami mieszanymi)**.** *Jeżeli* $G = (N, (S_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N})$ *będzie grą ze strategiami czystymi, to gra* $\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N})$ *jest rozszerzeniem gry* G *do gry z mieszanymi strategiami, jeśli:*

(1) $(\forall i \in N)(\Sigma_i = \{\sigma \in [0, 1]^{S_i} : \sum_{t\in S_i} \sigma(t) = 1\})$,
(2) *dla każdego* $i \in N$ *i każdego* $\sigma = (\sigma_1, \dots \sigma_{|N|}) \in \prod_{i\in N} \Sigma_i$

$$U_i(\sigma_1, \dots \sigma_{|N|}) = \sum_{(s_1,\dots,s_{|N|})} u_i(s_1, \dots, s_{|N|})\sigma_1(s_1)\dots\sigma_{|N|}(s_{|N|}).$$

Każdy zbiór Σ_i *jest zbiorem wszystkich strategii mieszanych gracza* $i \in N$*. Natomiast* $\Sigma = \prod_{i\in N} \Sigma_i$ *jest zbiorem wszystkich strategii mieszanych w grze* Γ.

Niech Γ bedzie grą z mieszanymi strategiami, niech $i \in N$ będzie ustalonym graczem w grze Γ. Rozważmy zbiór strategii $S_i = \{s^i_1, \dots, s^i_{m_i}\}$ gracza i. Zdefiniujemy odwzorowaie w sposób nastepujący:

$$\Sigma_i \ni \sigma \mapsto h(\sigma) = (\sigma(s_1), \dots, \sigma(s_{m_i})) \in [0, 1]^{m_i}.$$

Czytelnik sprawdzi, że odwzorowanie h jest różnowartościowe i ustala bijekcje pomiędzy Σ a $\Delta_i = h[\Sigma_i]$. Wprost z definicji zbioru Σ_i oraz odwzorowania h mamy

$$\Delta_i = \{(x_1, \dots, x_{m_i}) \in [0, 1]^{m_i} : \sum_{j=1}^{m_i} x_i = 1\}.$$

Wprost z definicji widzimy, że Δ_i jest $m_i - 1$ wymiarowym sympleksem w $\mathbb{R}^{m_i}$. Ponadto, Δ_i jest wypukłym zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^{m_i}$ takim, że jest on wypukłą powłoką zbioru jego wierzchołków:

$$\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}.$$

Dla każdego $i \in N$ niech $n = |N|$ and $(x^i_1, \ldots, x^i_{m_i}) = (\sigma_i(s_1), \ldots \sigma_i(s^i_{m_i}) = h_i(\sigma)$ to liczymy wypłatę U_k for $k \in N$

$$\begin{aligned} U_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = & \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in\prod_{i\in N} S_i} u_k(s_1, \ldots, s_k)\sigma_1(s_1)\cdots\sigma_n(s_n) \\ = & \sum_{s_1\in S_1} \cdots \sum_{s_n\in S_n} u_k(s_1, \ldots, s_k)\sigma_1(s_1)\cdots\sigma_n(s_n) \\ = & \sum_{j_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} u_k(s^1_{j_1}, \ldots, s^n_{j_n})x^1_{j_1}\ldots x^n_{j_n} \\ = & \widehat{U}_k(x^1_1, \ldots, x^1_{m_1}, \ldots, x^n_1, \ldots, s^n_{m_n}). \end{aligned}$$

Tutaj $\widehat{U}_k$ jest wielomianem $m_1 + \ldots + m_n$ zmiennych ze zbioru $\Delta = \prod_{j\in N} \Delta_i$.

Pokażemy, w jaki sposób czyste strategie gracza i możemy zakodować w Σ_i jak również w sympleksie Δ_i w taki sposób aby wypłaty u_k i $\hat{U}_k$ były równe dla każdego $k \in N$. Niech $s^i_j \in S_i$ będzie ustaloną strategią czystą gracza $i \in N$. Niech $\widehat{s^i_j}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $\{s^j_i\}$, tzn. dla dowolnego $s \in S_i$

$$\widehat{s^i_j}(s) = \begin{cases} 1 & s = s^i_j \\ 0 & s \neq s^i_j. \end{cases}$$

Oczywiście $\widehat{s^i_j} \in \Sigma_i$ a więc $h_i(\widehat{s^i_j}) = e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ gdzie 1 jest na j-tej współrzędnej. Policzmy wartość wypłaty k-go gracza w punkcie $(\widehat{s^1_{i_1}}, \ldots, \widehat{s^n_{i_n}})$ dla $i_1 \leq m_1, \ldots, i_n \leq m_n$

$$\begin{aligned} U_k(\widehat{s^1_{i_1}}, \ldots, \widehat{s^n_{i_n}}) = & \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} u_k(s_1, \ldots, s_n)\widehat{s^1_{i_1}}(s_1)\ldots\widehat{s^n_{i_n}}(s_n) \\ = & u_k(s^1_{i_1}, \ldots, s^n_{i_n}). \end{aligned}$$

Podobnie,

$$\widehat{U}_k(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} u_k(s^1_{j_1}, \ldots, s^n_{j_n})\delta_{j_1,i_1}\ldots\delta_{j_n,i_n} = u_k(s^1_{i_1}, \ldots, s^n_{i_n}).$$

Twierdzenie 13 (Nash, 1951)**.** *Dla kazdej gry ze strategiami mieszanymi (będącej rozszerzeniem gry z strategiami czystymi) istnieje równowaga Nasha.*

Dowód. Na podstawie rozważań z poprzedniego akapitu, możemy rozważyć grę

$$\Gamma = (N, (\Delta_i)_{i\in}, (U_i)_{i\in N}),$$

dla której $|N| = n$, dla każdego $i \in N$ $\Delta_i \subseteq [0,1]^{m_i}$, $0 < m_i \in \mathbb{N}$. Ponieważ dla kazdego $i \in N$ funkcja U_i jest wielomianem $m_1 + \ldots + m_n$ zmiennych rzeczywistych, więc U_i jest funkcją ciągłą jednostajnie na zwarym zbiorze $\Delta = \prod_{i\in N} \Delta_i$. Zdefiniujemy funkcję ciągłą $F : \Delta \to \Delta$, taką, że każdy punkt stały $x^* \in \Delta$ jest równowagą Nasha w grze Γ. Ponieważ Δ jest biorem zwartym i wypukłym w $\mathbb{R}^{\sum_{i\in N} m_i}$, to istnieje punkt stały $x^* \in \Delta$ ciągłego odwzorowania $F : \Delta \to \Delta$.

Niech będzie ustalony ciąg punktów $(x_1, \ldots, x_n)$, taki, że dla każdego $i \in N$ $x_i \in \Delta_i$ (taki ciąg utożsamiamy z elementem zbioru $\Delta = \prod_{i\in N} \Delta_i$). Zdefiniujemy ciąg $(F_1(x), \ldots, F_n(x))$ w następujący sposób, dla każdego $i \in N$

$$F_i(x) = F_i(x_i, x_{-i}) = \frac{x_i + \sum_{j=1}^{m_i} e^i_j \cdot \max\{0, u_i(e^i_j, x_{-i}) - u_i(x_i, x_{-i})\})}{1 + \sum_{j=1}^{m_j} \max\{0, u_i(e^i_j, x_{-i}) - u_i(x_i, x_{-i})\}} \in \Delta_i.$$

Tutaj $F_i(x)$ możemy zapisać jako $(x_i+\sum_j^m t_j e_j)/(1+\sum_j^m t_j)$, gdzie $m = m_i$, $e_j = e^i_j$, $\sum_j^m$ oznacza sumę $\sum_{j=1}^{m_i}$ oraz $t_j = \max\{0, u_i(e^i_j, x_{-i}) - u_i(x_i, x_{-i})\}$. Aby pokazać, że $F_i(x) \in \Delta_i$ skorzystajmy z faktu, że $x_i = \sum_j^m r_j e_j$, gdzie $\sum_j^m r_j = 1$ i $r_j \geq 0$ dla każdego $j \leq m$. Wtedy

$$\begin{aligned} F_i(x) =&(x_i + \sum_j^m t_j e_j)/(1 + \sum_j^m t_j) = (\sum_j^m (r_j + t_j)e_j)/(1 + \sum_k^m t_k) \\ = & \end{aligned}$$

a więc współczynniki stojące przy e_j są nieujemne oraz

$$\sum_j^m (r_j + t_j)/(1 + \sum_k^m t_k) = (\sum_j^m r_j + \sum_j^m t_j)/(1 + \sum_k^m t_k) = (1 + \sum_j^m t_j)/(1 + \sum_k^m t_k) = 1.$$

Pokazaliśmy więc, że $F_i(x) \in \Delta_i$ dla dowolnego $i \in N$.

Niech $\Delta_{-i} = \prod_{j\in N\setminus\{i\}} \Delta_j$ oraz dla $x \in \Delta$ niech $x_{-i} \in \Delta_{-i}$ powstaje z x przez usunięcie w x jego i-tej współrzędnej. Pokażemy, że funkcja $F : \Delta \to \Delta$ jest ciągła na Δ. Wystarczy pokazać, że dla każdego $i \in N$ i $x = (x_i, x_{-1})$ $F_i : \Delta \to \Delta_i$ jest ciągłą. Niech $j \in \{1, \ldots, m_i\}$, to $t^i_j : \Delta \to \mathbb{R}$ będzie określona następująco:

$$t^i_j(x_i, x_{-i}) = \max\{0, U_i(e^i_j, x_{-i}) - U_i(x_i, x_{-i})\}.$$

Ciągłość funkcji t^i_j wynika z ciągłości funkcji U_i, funkcji stałej 0 oraz z faktu, że max z dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Na podstawie wzoru definiującego funkcję F_i widzimy, że ona też jest funkcją ciągłą. W rezultacie funkcja F jest funkcją ciągłą.

Ponieważ zbiór $\Delta \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{k=1}^n m_k}$ jest zbiorem zwartym i wypukłym a funkcja $F : \Delta \to \Delta$ jest ciągła na Δ, to istnieje punkt stały $x^* \in \Delta$ odwzorowania F. Pokażemy, że x^* jest punktem równowagi Nasha w grze Γ. Wybierzmy dowolne $i \in N$ oraz $x_i \in \Delta_i$, udowodnimy

$$U_i(x_i, x^*_{-i}) \leq U_i(x^*) = U_i(x^*_i, x^*_{-i}).$$

Ponieważ $F(x^*) = x^*$, więc $F_i(x^*_i, x^*_{-i}) = x^*_i$. Wtedy mamy

$$x^*_i = F(x^*_i, x^*_{-i}) = \frac{x^*_i + \sum_{j=1}^{m_i} e^i_j \cdot \max\{0, u_i(e^i_j, x^*_{-i}) - u_i(x^*_i, x^*_{-i})\})}{1 + \sum_{j=1}^{m_j} \max\{0, u_i(e^i_j, x^*_{-i}) - u_i(x^*_i, x^*_{-i})\}}.$$

Pokażemy, że

$$(\forall j \in \{0, \ldots, m_i\})\ U_i(e^i_j, x^*_{-i}) \leq U_i(x^*_i, x^*_{-i}).$$

Przyjmując $t^i_j = t^i_j(x_i, x_{-i}) = \max\{0, U_i(e^i_j, x_{-i}) - U_i(x_i, x_{-i})\}$, udowodnimy następujący Claim.

Claim 1. *Jeżeli* $F(x) = x$, *to dla każdego* $i \in N$ *oraz jeśli* $x = (x_i, x_{-i})$, *to zachodzi*

$$(\sum_j^m t_j^i)x_i = \sum_j^m t_j^i e_j$$

Więcej, jeżeli $x_i = \sum_j^m r_j e_j^i$, *to dla każdego* $j = 1, \ldots, m$ $(\sum_k^m t_k^i)r_j = t_j^i$.

Dowód. Jezeli $x_i = (x_i + \sum_j^m t_j^i e_j)/(1 + \sum_j^m t_j^i)$, to

$$(1 + \sum_j^m t_j^i - 1)x_i = \sum_j^m t_j^i e_j$$

a stąd

$$(\sum_j^m t_j^i)x_i = \sum_j^m t_j^i e_j$$

Niech $x_i = \sum_j^m r_j e_j$, to wtedy

$$\sum_j^m (\sum_k^m t_k^i) r_j e_j = \sum_j^m t_j^i e_j.$$

Ponieważ $\{e_1, \ldots, e_m\}$ jest liniowo niezależny, to dla każdego $j = 1, \ldots, m$ zachodzi równość $(\sum_k^m t_k^i)r_j = t_j^i$. □

Załóżmy, że nie zachodzi warunek

$$(\forall i \in N)(\forall j \in \{0, \ldots, m_i\})\ U_i(e_j^i, x_{-i}^*) \leq U_i(x_i^*, x_{-i}^*).$$

Wtedy istnieją $i \in N$, $j \in \{1, \ldots, m_i\}$ takie, że $U_i(e_j^i, x_{-i}^*) > U_i(x^*)$ a stąd $t_j^i > 0$. Niech $x_i^* = \sum_{j=1}^{m_i} r_j e_j^i$, wtedy $U_i(x^*) = U_i(x_i^*, x_{-i}^*) = \sum_{j=1}^{m_i} r_i U_i(e_j^i, x_{-i}^*)$. Ponieważ $t_j^i > 0$, to $\sum_{k=1}^{m_i} t_k > 0$ a więc na mocy żądania Claim 1, dla każdego $j \in \{1, \ldots, m_i\}$ $r_j > 0 \longleftrightarrow t_j^i > 0$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
0 =& (\sum_{j=1}^{m_i} r_j U_i(e_j^i, x_{-i}^*)) - U_i(x^*) \\
=& \sum_{j=1}^{m_i} r_j U_i(e_j^i, x_{-i}^*) - \sum_{j=1}^{m_i} r_j U_i(x^*) \\
=& \sum_{j=1}^{m_i} r_j (U_i(e_j^i, x_{-i}^*) - U_i(x^*)) \\
=& \sum_{\{j\colon r_j > 0\}} r_j (U_i(e_j^i, x_{-i}^*) - U_i(x^*)) \\
=& \sum_{\{j\colon r_j > 0\} \neq \emptyset} r_j t_j^i > 0,
\end{aligned}$$

sprzeczność.

Zauważmy, że istnieją liczby $t_1, \ldots, t_{m_i} \in [0,1]$ takie, że $\sum_{j=1}^{m_i} t_i = 1$ i $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} t_j e^i_j$. Korzystając z wieloliniowości funkcji U_i mamy

$$U_i(x_i, x^*_{-i})) = \sum_{j=1}^{m_i} t_j U_i(e^i_j, x^*_{-i}) \leq \sum_{j=1}^{m_i} t_j U_i(x^*_i, x^*_{-i}) = U_i(x^*) \sum_{j=1}^{m_i} t_j = U_i(x^*).$$

Ponieważ $i \in N$ i $x_i \in \Delta_i$ było wybrane w sposób dowolny, to punkt $x^* \in \Delta$ stanowi równowagę Nasha w grze Γ. □

Podamy przykład dwuosobowej gry Γ o sumie zerowej w której strategie czyste stanowią nieskończony zbiór i w której nie występuje równowaga Nasha.

Przykład 3. *Niech Γ będzie dwuosobową grą o sumie zerowej z mieszanymi strategiami. Niech $S_1 = S_2 = \mathbb{N}$ będą zbiorem strategii czystych graczy w grze Γ a wypłata określona następująco:*

$$u(m,n) = u_1(m,n) = \begin{cases} 1 & m > n \\ 0 & m = n \\ -1 & m < n. \end{cases}$$

W takim razie strategie mięszane graczy są równe $\Sigma_1 = \Sigma = \Sigma_2$, gdzie

$$\Sigma = \{\sigma \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n) = 1\} = \{x \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1\}.$$

Natomiast wypłata pierwszego gracza w grze Γ jest równa

$$U(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u(m,n) x_m y_n,$$

dla dowolnych $x, y \in \Sigma$. Teraz wyznaczymy wartość górną $\bar{v}$ i dolną $\underline{v}$ gry Γ:

$$\underline{v} = \max_{x\in\Sigma_1} \min_{y\in\Sigma_2} U(x,y), \bar{v} = \min_{y\in\Sigma_2} \max_{x\in\Sigma_1} U(x,y).$$

Należy zauważyć, że wartości istnieją ponieważ

$$|U(x,y)| \leq \sum_{n,m} x_m y_n \leq 1 \text{ dlaczego ?}$$

Spróbujemy wyznaczyć wartość dolną gry Γ. Niech będzie dany $x \in \Sigma_1$ i $\epsilon \in (0,1)$. Wtedy jest $k \in \mathbb{N}$ takie, że $1 - \epsilon < \sum_{i=0}^{k-1} x_i \leq 1$. Wówczas dla dowolnego $n \geq k$ $0 \leq \sum_{i=k}^{n} x_j < \epsilon$. Niech $y \in \Sigma_2$ będzie określone następująco

$$y(j) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k. \end{cases}$$

Niech $m, n \in \mathbb{N}$ będą dowolne takie, że $k < m, n$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in\{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,n\}} u(i,j)x_i x_j =& \sum_{i\le m}\sum_{j\le n} u(i,j)x_i y_j \\
=& \sum_{i=0}^{m} u(i,k)x_i 1 = \sum_{i<k} u(i,k)x_i + u(k,k)x_k + \sum_{i=k+1}^{m} u(i,k)x_i \\
=& \sum_{i=0}^{m}(-1)x_i + 0 + \sum_{i=k+1}^{m} 1x_i \\
\le& (-1)\sum_{i=0}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{m} x_i \\
\le& -1 + \epsilon.
\end{aligned}$$

Ponieważ m, n było dowolne takie, że $k < m, n$, węc $U(x, y) \le -1 + \epsilon$. Ale $\epsilon \in (0, 1)$ było wybrane w spsób dowolny tak więc dla każdego $x \in \Sigma_1$ $\min_{y\in\Sigma_2} U(x, y) \le -1$. W rezultacie, $\underline{v} \le -1$. W podobny sposób oszacujemy wartość górną gry Γ. Niech $y \in \Sigma_2$ będzie dowolne, $\epsilon \in (0, 1)$. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie taką liczbą aby była spełniona nierównść $1 - \epsilon < \sum_{j<k} y_j/$ Definiujemy $x \in \Sigma_1$ nastepująco:

$$x(i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Tak jak poprzednio, niech $m, n \in \mathbb{N}$ będą dowolnymi liczbami dla których zachodzi $k < m, n$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in\{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,n\}} u(i,j)x_i x_j =& \sum_{i\le m}\sum_{j\le n} u(i,j)x_i y_j \\
=& \sum_{j=0}^{m} u(k,j)1y_j = \sum_{j<k} u(k,j)y_j + u(k,k)y_k + \sum_{j=k+1}^{m} u(k,j)y_j \\
=& \sum_{j=0}^{k-1} 1y_j + 0 + \sum_{j=k+1}^{n}(-1)y_j \\
\ge& 1 - \epsilon - \epsilon = 1 - 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Wobec dowolności liczb m, n takich, że $k < m, n$ mamy $U(x, y) \ge 1 - 2\epsilon$. Dla każdego $y \in \Sigma_2$ istnieje $x \in \Sigma_1$ takie, że $1 - 2\epsilon \le U(x, y)$. Więc dla każdego $y \in \Sigma_2$ mamy $1 - 2\epsilon \le \max_{x\in\Sigma_1} U(x, y)$ a stąd

$$1 - 2\epsilon \le \bar{v}.$$

Wobec dowolności wyboru $\epsilon \in (0, 1)$ otrzymujemy $1 \le \bar{v}$. Ostatecznie $\underline{v} \le -1 < 1 \le \bar{v}$.

Ponieważ Γ jest dwuosobową grą o sumie zerowej dla której $\underline{v} < \bar{v}$, to nie istnieje równowaga Nasha w Γ. Gdyby istniała równowaga Nasha $(x^*, y^*) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ w tej grze, to wtedy $\underline{v} = U(x^*, y^*) = \bar{v}$, co jak pokazaliśmy, jest to niemożliwe.

6. Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym

6.1. **Sympleksy i podziały symplicjalne.** W tym podrozdziale zajmiemy się szczególnie prostymi podzbiorami przestrzeni euklidesowej jakimi są sympleksy.

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^{n+1}$ a w niej ustaloną bazę $\mathcal{B} = \{e_0, \ldots, e_n\}$ $\mathbb{R}^{n+1}$. Wtedy definiujemy sympleks $S = [\mathcal{B}] = [e_0, \ldots, e_n]$ w sposób następujący:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : (\exists t \in (0,1)^{n+1})\ \ x = \sum_{k=0}^{n} t_k e_k \ \wedge\ \sum_{k=0}^{n} t_k = 1\}.$$

Jeżeli rozważymy dowolny podciąg $0 \leq i_0 < \ldots < i_k \leq n$ taki, że $0 < k$, to zbiór

$$[e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}] = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} :\ (\exists t_0, \ldots, t_k \in (0,1))x = \sum_{j=0}^{k} t_j e_{i_j} \ \wedge\ \sum_{j=0}^{k} t_j = 1\}$$

nazywamy scianą k-wymiarową w sympleksie S. Dodatkowo, dla $j \in \{0, \ldots, n\}$ przyjmujemy $[e_j] = \{e_j\}$ i nazywamy wierzchołkiem lub 0-wymiarową ścianą sympleksu S.

Zauważmy, że

$$\overline{S} = \dot{\bigcup_{0 \leq k \leq n}} \ \dot{\bigcup_{0 \leq j_0 < \ldots < i_k \leq n}} [e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}].$$

Niech będzie dany sympleks $S = \{e_0, \ldots, e_n\}$, to rodzinę sympleksów $\mathscr{P}$ nazywamy podziałem symplicialnym S jeżeli

1. $\mathcal{L}S = \bigcup \mathscr{P}$,
2. dla każdych dwóch $\Delta, \Delta' \in \mathscr{P}$ zachodzi $\overline{\Delta} \cap \overline{\Delta'} = \emptyset$ lub $\overline{\Delta} \cap \overline{\Delta'}$ jest domknięciem wspólnej ściany.

6.2. **Lemat Spernera.** Niech będzie dany podział symplicjalny $\mathscr{P}$ sympleksu $S = [e_0, \ldots, e_n]$, $\mathscr{W}$ będzie zbiorem wszystkich wierzchołków sympleksów z podziału $\mathscr{P}$. Powiemy, że $m : \mathscr{W} \to \{0, \ldots, n\}$ jest numeracją Spernera jeżeli dla wierzcholka $s \in \mathscr{W}$ takiego, że dla pewnego ciagu $0 \leq i_0 < \ldots < i_k \leq n$ $s \in [e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}]$, to $m(s) \in \{i_0, \ldots, i_k\}$.

Lemmat 1 (Sperner). *Jeżeli $S = [e_0, \ldots, e_n]$ jest sympleksem n-wymiarowym a $\mathscr{P}$ jego podziałem symplicjalnym o zbiorze wierzchołków $\mathscr{W}$, to dla każdej numeracji Spernera zbioru $\mathscr{W}$, istnieje nieparzyście wiele sympleksów n-wymiarowych, dla których zbiór wierzchołków jest ponumerowany wszystkimi liczbami ze zbioru $\{0, 1, \ldots, n\}$.*

Dowód. Dowód lematu przeprowadzimy przez indukcję względem wymiaru sympleksu. Jeżeli mamy sympleks jednowymiarowy $[e_0, e_1]$ z zadaną numeracją Spernera m ustalonego podziału symplicjalnego na jednowymiarowe sympleksy $\{[s_0, s_1], \ldots, [s_{n-1}, s_n]\}$. Wtedy $m(s_0) = 0$ i $m(s_n) = 1$. Jeżeli $n = 1$, to $\mathcal{P} = \{[e_0, e_1]\}$ i wtedy mamy tezę lematu

Spernera. Złóżmy, że dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ sympleksu $[e_0, e_1]$ o n sympleksach jednowymiarowych lemat jest prawdziwy. Niech będzie dany zbiór $\mathcal{P} = \{[s_0, s_1], \ldots, [s_{n-1}, s_n]\}$ z numeracją Spernera, tj. $m(s_0) = 0$ i $m(s_n) = 1$. Niech bedzie dane $k \leq n$, takie, że

$$k = \min\{i \in \{0, \ldots, n\} : \ m(s_k) = 1\}.$$

Jeżeli $k > 1$, to $m(s_{k-1}) = 0$ i $m(s_k) = 1$ i wtedy teza lematu jest prawdziwa dla $\{[s_{k-1}, s_k], \ldots, [s_{n-1}, s_n]\}$. Ponieważ $m(s_i) = 0$ dla każdego $i < k$, więc lemat jest prawdziwy dla rodziny $\mathcal{P}$. Załóżmy więc, że $k = 1$. Wtedy albo dla każdego $i\{k, \ldots, n\}$ $m(s_i) = 1$ albo istnieje r takie, że $k < r < n$ i $m(s_r) = 0$. W pierwszym przypadku

$$\{i \in \{1, \ldots, n\} : m(s_i) \neq m(s_{i+1}\} = \{0\}$$

a więz lemat jest prawdziwy. Natowmiat dla drugiego przypadku, niech r będzie najmniejszą taka liczbą, że $k < r < n$ i $m(r) = 0$. Na mocy założenia indukcyjnego zbiór

$$\{i \in \{r, \ldots, n\} : \ m(s_i) \neq m(s_{i+1})$$

jest nieparzysty. Ponieważ

$$\{i \in \{0, \ldots, r-1\} : \ m(s_i) \neq m(s_{i+1})\} = \{k-1, r-1\}$$

więc

$$\{i \in \{0, \ldots, n\} : \ m(s_i) \neq m(s_{i+1})$$

jest zbiorem nieparzystym, co dowodzi prawdziwości Lematu Spernera dal sympleksów jednowymiarowych.

Niech $S = [e_0, \ldots, e_n]$ dla $n > 1$ i załóżmy, że dla sympleksów o wymiarze mniejszym niż n lemat jest prawdziwy. Rozważmy podział symplicjalny $\mathcal{P}$ sympleksu S i niech $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich sympleksów n wymiarowych. Niech r_{n-1} będzie liczbą sympleksów $n-1$ wymiarowych zawartch w ścianie $[e_1, \ldots, e_{n-1}]$, których wirzchołki są ponumerowane wszystkimi liczbami ze zbiowu $\{0, \ldots, n-1\}$. Natomiast r_n jest liczbą sympleksów w $\mathcal{P}_n$, których wierzchołki są ponumerowane wszystkimi lczbami ze zbioru $\{0, \ldots, n\}$. Z założenia liczba r_{n-1} jest liczbą nieparzystą.

Ustalmy funkcję $l : \mathcal{P}_n \to \mathbb{N}$ określającą dla każdego $s \in \mathcal{P}_n$ liczbą $n-1$ wymiarowych ścian sympleksu s, których wierzchołki sa ponumerowane wszystkimi liczbami ze zbioru $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Wówczas dla każdego $s \in \mathcal{P}_n$ mamy

$$l(s) = \begin{cases} 1 & \text{dla } m[W(s)] = \{0, \ldots, n\} \\ 2 & \text{dla } m[W(s)] = \{0, \ldots, n-1\} \\ 0 & \text{dla } \{0, \ldots, n-1\} \setminus m[W(s)] \neq \emptyset \end{cases},$$

gdzie

$$W(s) = \{u : u \text{ jest wierzchołkiem } s\}.$$

Więc mamy

$$r_n \equiv \sum_{s \in \mathcal{P}_n} l(s) \mod 2.$$

Z drugiej strony, kazda $n-1$-wymiarowa ściana n wymiarowego sympleksu w $\mathcal{P}$ dla której wierzchołki są ponumeroane wszystkimi liczbami ze zbioru $\{0, \ldots, n-1\}$ jest liczona dwa razy o ile jest wspólną ścianą dwóch różnych $s, s' \in \mathcal{P}_n$ albo raz w przypadku, gdy wszystkie jej wierzchołki leżą w $\overline{[e_0, \ldots, e_{n-1}]}$. Zauważmy, że liczba tego drugiego rodzaju ścian ($n-1$-wymiarowych) jest równa liczbie r_{n-1}. Tak więc, mamy

$$\sum_{s \in \mathcal{P}_n} l(s) \equiv r_{n-1} \equiv 1 \mod 2.$$

Ostatecznie, r_n jest liczbą nieparzystą. □

6.3. **Pokrycia otwarte i domknięte zbiorów zwartych.** W tym podrozdziale udowodnimy lemat i jego wniosek o pokryciach zbiorów zwartych zbiorami otwartymi jak i również domkniętymi. Poniższe twierdzenie i jego wniosek znajdzie zastosowanie w lemacie Knastera-Kuratowskiego-Mazurkiewicza o pokryciu bryły sympleksu przez rodzinę zbiorów domkniętych.

Lemmat 2 (Lebesgue). *Niech $F \subseteq X$ będzie zbiorem zwartym w przestrzeni metrycznej X, natomiast $\mathcal{U}$ pokryciem otwartym zbioru F. Wtedy istnieje liczba $\epsilon > 0$ taka, że dla każdego $x \in F$ istnieje $U \in \mathcal{U}$ takie, że $B(x, \epsilon) \subseteq U$.*

Dowód. Załóżmy, że lemat jest nieprawdziwy, to wtedy

$$(\exists \mathcal{U} \text{ otwarte zbiory})\ (F \subseteq \bigcup \mathcal{U}) \wedge (\forall \epsilon > 0)(\exists x \in F)(\forall U \in \mathcal{U})\ (B(x, \epsilon) \setminus U \neq \emptyset).$$

Na mocy powyższej własności, istnieje rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ taka, że $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ i dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $x \in F$ takie, że dowolnego $U \in \mathcal{U}$ mamy $B(x, \epsilon) \setminus U \neq \emptyset$. Możemy więc skonstruować ciąg $(x_n)_{n \in \omega} \in F^\omega$, taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(\forall U \in \mathcal{U}) B(x_n, 1/(n+1)) \setminus U \neq \emptyset.$$

Ponieważ F jest zwarty (także ciągowo), to istnieje $x \in F$ i podciąg $(x_{k_n})_{n \in \omega}$ ciagu $(x_n)_{n \in \omega}$, taki, że $\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = x$. Ponieważ $\mathcal{U}$ jest pokryciem zbioru F, to istnieją $U_0 \in \mathcal{U}$ i $\epsilon > 0$, takie, że $B(x, \epsilon) \subseteq U_0$. Wówczas, istnieje dostatecznie duże $n \in \omega$, takie, że $1/(n+1) < \epsilon/2$ i $d(x, x_n) < \epsilon/2$. Korzystając z nierówności trójkąta, dla dowolnego $y \in B(x_n, 1/(n+1))$ mamy

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < 1/(n+1) + \epsilon/2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Pokazaliśmy, że $B(x_n, 1/(n+1)) \subseteq U_0$, sprzeczność. □

Rozważmy podzbiór zwarty H w przestrzeni metrycznej X i rodzinę zbiorów domkniętych $\mathcal{F}$ w X taką, że $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Wtedy biorąc $\mathcal{U} = \{F^c : F \in \mathcal{F}\}$ mamy

$$X = \emptyset^c = (\bigcap \mathcal{F})^c = (\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}\})^c = \bigcup \{F^c : F \in \mathcal{F}\} = \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}\} = \bigcup \mathcal{U}.$$

Korzystając z poprzedniego lematu, jest $\epsilon > 0$, takie, że dla każdego $x \in H$ istnieje $U \in \mathcal{U}$, takie, że $B(x, \epsilon) \subseteq U$. Więc dla każdego $x \in H$ istnieje $F \in \mathcal{F}$ takie, że $B(x, \epsilon) \cap F = \emptyset$.

Na podstawie powyższych rozważań, możemy sformułować następujący lemat.

Lemmat 3. *Niech X będzie przestrzenią metryczną a $H \subseteq X$ będzie zbiorem zwartym. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną zbiorów domkniętych w X taką, że $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Wtedy istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dla każdego $x \in H$ istnieje $F \in \mathcal{F}$ takie, że $B(x, \epsilon) \cap F = \emptyset$.*

6.4. **Lemat Knastera-Kuratowskiego-Mazurkiewicza.** Stosując lemat Spernera, Kuratowski Knaster i Mazurkiewicz udowodnili lemat związany z pokryciem domkniętym sympleksu o specjalnej własności. Poniższy lemat odegra ważną rolę w dowodzie twierdzenia Brouwera o punkcie stałym.

Lemmat 4 (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz)**.** *Niech $S = [e_0, \ldots, e_n]$ będzie sympleksem i załóżmy, że mamy rodzinę zbiorów domkniętych $\mathcal{F} = \{F_0, \ldots, F_n\}$ w $\mathbb{R}^{n+1}$ która pokrywa sympleks S. Załóżmy, że dla dowolnego $0 \leq i_0 < \ldots < i_k \leq n$ zachodzi warunek*

$$\overline{[e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}]} \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} F_{i_j}.$$

Wtedy $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Dowód. Niech będzie dane pokrycie $\mathcal{F}$ spełniające warunki w powyższym lemacie. Załóżmy, że $\mathcal{F} = \emptyset$, to z lematu 3 istnieje $\epsilon > 0$, taki, że dla dowolnego $x \in \overline{S}$ istnieje $k \leq n$ takie, że $F_k \cap B(x, \epsilon) = \emptyset$. Dla sympleksu S wybierzmy podział symplicjalny $\mathscr{P}$ z jego wszystkimi wierzchołkami $\mathscr{W}$ taki, że średnica każdego sympleksu z $\mathscr{P}$ jest mniejsza niż ϵ. Ponieważ $\overline{S}$ jest rozłączną sumą mnogościową wszystkich ścian sympleksu S, to każdy wierzchołek $s \in \mathscr{W}$ zawiera się w pewnej ścianie (jedynej) $[e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}]$ sympleksu S. Na mocy założenia o pokryciu $\mathcal{F}$ mamy

$$s \in [e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}] \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} F_{i_j}.$$

Niech j będzie najmniejszą liczbą, dla której $s \in F_{i_j}$, to przyjmijmy $m(s) = j \in \{i_0, \ldots, i_k\}$. Oczywiście zdefiniowana tak funkcja $m : \mathscr{W} \to \{0, \ldots, n\}$ stanowi numerację Spernera. Więc na mocy lematu Spernera, istnieje sympleks $\Delta \in \mathscr{P}$, którego wierzchołki są ponumerowane wszstkimi liczbami ze zbioru $\{0, \ldots, n\}$. Oznacza to, że dla każdego $F \in \mathcal{F}$ istnieje wierzchołek s sympleksu Δ, który jest elementem zbioru F. Więc dla każdego $F \in \mathcal{F}$, $F \cap \overline{\Delta} \neq \emptyset$. Ale Δ ma średnicę mniejszą niż ϵ, więc istnieje $x \in \overline{S}$ taki, że $\overline{\Delta} \subseteq B(x, \epsilon)$. Stąd istnieje $F \in \mathcal{F}$, który jest rozłączny z $B(x, \epsilon)$ a tym bardziej zachodzi $F \cap \overline{\Delta} = \emptyset$, co daje nam sprzeczność. □

6.5. **Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.** W tym podrozdziele przeprowadzimy dowód twierdzenia Brouwera, które ma wiele zastosowań w matematyce. Twierdzenie to było i jest inspiracją matematyków, którzy znajdują twierdzenia o punkcie stałym w szerszym kontekscie niż wspomniany wynik Brouwera. Przytoczmy, więc brzmienie tytułowego twierdzenia.

Twierdzenie 14 (Twierdzenie Brouwer'a o punkcie stałym)**.** *Jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty i wypukły, funkcja $F : A \to A$ jest funkcją ciągłą ma A, to istnieje $a \in A$, takie, że $F(a) = a$.*

Dowód. Niech $S = [e_0, \ldots, e_n]$ będzie n-wymiarowym sympleksem w $\mathbb{R}^{n+1}$. Rozważmy funkcję ciągłą $f : \overline{S} \to \overline{S}$. Dla $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \overline{S}$ oraz $y = (y_0, \ldots, y_n) = f(x)$ i ustalonego $i \in \{0, \ldots, n\}$ powiemy, że:

$$x \in F_i \longleftrightarrow y_i \leq x_i \longleftrightarrow \pi_i f(x) \leq \pi_i(x) \longleftrightarrow (\pi_i f - \pi_i)(x) \leq 0.$$

Ponieważ f oraz rzutowanie na i-tą oś są funkcjami ciągłymi, więc każde $F_i \subseteq \overline{S}$ jest zbiorem domkniętym. Sprawdzimy, że każde F_i spełnia warunek lematu KKM, tzn.

$$(\forall k \leq n)(\forall i_0, \ldots, i_k)\ (0 \leq i_0 < \ldots < i_k \leq n \longrightarrow [e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}] \subseteq \bigcup_{j \leq k} F_{i_j}).$$

Aby to sprawdzić, niech $x \in [e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}]$ oraz $y = f(x)$, to wtedy

$$\sum_{j \leq k} x_j = 1$$

oraz

$$\sum_{j \leq k} y_j \leq 1.$$

Więc istnieje j_0 takie, że $y_{j_0} \leq x_{j_0}$ dla $j \in \{0, \ldots, k\}$ a stąd $x \in F_{i_{j_0}} \subseteq \bigcup_{j \leq k} F_{i_j}$. Stosując Lemat 4 Istnieje $x \in \overline{S}$ takie, że $x \in F_0 \cap \ldots F_n$, daje

$$(\forall i \leq n)\ (y_i \leq x_i).$$

Ponieważ $x, y \in \overline{S}$ (tutaj $y = f(x)$), to

$$1 \leq \sum_{i \leq n} y_i \leq \sum_{i \leq n} x_i = 1.$$

Więc dla każdego $i \in \{0, \ldots, n\}$ mamy $y_i = x_i$, co ostatecznie daje $x = y = f(x)$. □

7. Przestrzenie metryczne

Jak dotąd, rozważaliśmy gry skończone. Jednak w wielu sytuacjach, jak za chwilę się przekonamy, mamy do czynienia z grami nieskończonymi. Pierwszy znany przykład takiej gry zaproponował polski matematyk Stanisław Mazur. W pierwotnej wersji gra przebiega w sposób następujący. Wybieramy pewien podzbiór A odcinka jednostkowego $[0, 1]$ i gracze I i II wybierają zbiory otwarte, według nastepującej zasady:

- gracz I wybiera odcinek otwarty I_0, następnie gracz II wybiera odcinek otwarty J_0, taki, że $J_0 \subseteq I_0$,
- w n-tym ruchu ($n > 00$) gracz I wbierra odcinek otwarty I_n, taki, że $I_n \subseteq J_{n-1}$, nastepnie gracz II wybiera odcinek otwarty J_n taki, że $J_n \subseteq I_n$.
- jeżeli obaj gracze wykonali n-ruch, to grają w $n+1$ ruchu wg. poprzedniego punktu.

Gracz I wygrywa tę grę, jeśli $A \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$, w przeciwnym wypadku wygrywa gracz II. Stefan Banach podał rozwiązanie problemu, który postawił Mazur. Mianowicie, jezeli A jest zbiorem posiadającym tzw. własność Baire'a i nie jest zbiorem I kategorii Baire'a, to wygrywa gracz I. Jeżeli zbiór A jest pierwszej kategorii Baire'a, to wygrywa gracz II.

Z tego powodu, wporadzimy podstawowe pojęcia związane ze zbiorami mających własność Baire'a. Wspomniana własność, nabiera właściwego znaczenia, jeżeli będziemy rozważać podzbiory w przestrzeniach metrycznych, dla których zbiory pierwszej kategorii Baire'a stanowią nietrywialny σ-ideał (tj. cała przestrzeń metryczna nie jest elementem tego ideału). Rene Luis Baire'a udowodnil, że taka sytuacja występuje w dowolnej zupełnej przestrzeni metrycznej.

7.1. **Definicja i podstawowe własności przestrzeni metrycznych.** Powiemy, że para (X,d) stanowi przesrzeń metryczna, jeżeli $X \neq \emptyset$, $d : X \times X \to \mathbb{R}$, taką, że

(1) $(\forall x, y \in X)\ d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \longleftrightarrow x = y$,
(2) $(\forall x, y \in X)\ d(x,y) = d(y,x)$,
(3) $(\forall x, y, z \in X)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ - nierówność trójkąta.

Przykładami przestrzeni metrycznych są $(\mathbb{R}, d)$, gdzie dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y $d(x,y) = |x-y|$. Ogólniej, przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ z określoną funkcją $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, określoną wzorem dla $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

stanowi przestrzeń metryczną. Podobnie, dla $p \in [1, \infty)$ (X, d_p) zdefiniowane następująco:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$$

stanowi przestrzeń metryczną. Przestrzeń $(\mathbb{R}^n, d_p)$ oznaczamy przez l_p^n. Ponadto, jeżeli dla $x, y \in \mathbb{R}$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| :\ i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

to d_∞ również jest metryką w $\mathbb{R}^n$. Wtedy taką przestrzeń oznaczamy krótko przez l_∞^p. Jeżeli X jest dowolnym niepustym zbiorem, to możemy wprowadzić metrykę dyskretną $d : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Niech będzie dany punkt x w przestrzeni metrycznej (X,d), $r > 0$. Kulą w środku x i promieniu r nazywamy zbiór

$$B(x,r) = \{y \in X :\ d(x,y) < r\}.$$

Powiemy, że podzbiór $U \subseteq X$ jest zbiorem otwartym jeżeli zachodzi warunek

$$(\forall x \in U)(\exists r > 0) B(x,r) \subseteq U.$$

Zauważmy, że kazda kula $B(x,r)$ jest zbiorem otwartym w X. Przez $\tau(X)$ oznaczymy rodziną wszystkich zbiorów otwartych w X. Jeżeli to nie bedzi prowadzić do nieporozumień, to będziemy pisać po prostu τ zamiast $\tau(X)$. Mozemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 15. *Niech (X,d) jest przestrzenią metryczną. Wtedy*

(1) $\emptyset, X \in \tau$,
(2) *jeśli* $U, V \in \tau$ *to* $U \cap V \in \tau$,
(3) $(\forall \mathcal{U} \subseteq \tau)\ \bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Zbiór $F \subseteq X$ jest domknięty w X jesli $X \setminus F$ jest zbiorem otwartym w X. Stosując prawa de Morgana mamy natychmiast następujący wniosek w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 16. *Niech (X, d) jest przestrzenią metryczną. Wtedy*

(1) $\emptyset, X$ *ś zbiorami domkniętymi,*
(2) *jeśli U, V są domknięte, to $U \cup V$ też jest domknięty,*
(3) *jeżeli $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ jest rodziną zbiorów dokniętych, to $\bigcap \mathcal{F}$ jest zbiorem domkniętym.*

Na podstawie powyższego twierdzenia, możemy wprowadzić operacją domkniecia dowolnego podzbioru przestrzeni metrycznej. Niech $A \subseteq X$, wtedy zbiór $\overline{A}$ zdefiniowany następująco

$$\overline{A} = \bigcap \{F : \ A \subseteq F \wedge F \text{ jest domknięty w } X\}$$

jest zbiorem domkniątym zawierającym zbiór A. Mamy następujący fakt.

Fakt 2 (operacja domknięcia - własności)**.** *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, to wtedy dla każdego $A, B \subseteq X$ i dowolnej rodziny $\{A_t \in P(X) : \ t \in T\}$ mamy*

(1) $\overline{A} = \{x \in X : \ (\forall r > 0) B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$,
(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
(3) $A \subseteq B \longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$,
(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{A}$,
(5) $\overline{\bigcap_{t \in T} A_t} \subseteq \bigcap_{t \in T} \overline{A_t}$,
(6) $\bigcup_{t \in T} \overline{A_t} \subseteq \overline{\bigcup_{t \in T} A_t}$.

Dualnym pojęciem do domknięcia zbioru jest wnętrze zbioru A, które zapisujemy jako $\mathrm{Int}(A)$. Niech $A \subseteq X$, to

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup \{U \in \tau(X) : \ U \subseteq A\}.$$

Na przykład $\mathrm{Int}([0, 1] = (0, 1))$, $\mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset = \mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Fakt 3 (wnętrze zbioru - własności)**.** *Niech (X, d) będzie ustaloną przestrzenią metryczną, $A, B \subseteq X$, $\{A_t \in P(X) : \ t \in T\}$, to wtedy*

(1) $\mathrm{Int}(A)$ *jest zbiorem otwartym i* $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$,
(2) $\mathrm{Int}(A) = \{x \in X : \ (\exists r > 0) B(x, r) \subseteq A\}$,
(3) $\mathrm{Int}(A) = (\overline{A^c})^c$,
(4) $\overline{A} = (\mathrm{Int}(A^c))^c$,
(5) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$,
(6) $A \subseteq B \longrightarrow \mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$,
(7) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$,
(8) $\bigcup_{t \in T}(\mathrm{Int}(A_t)) \subseteq \mathrm{Int}(\bigcup_{t \in T} A_t)$,
(9) $\mathrm{Int}(\bigcap_{t \in T} A_t) \subseteq \bigcap_{t \in T} \mathrm{Int}(A_t)$.

W każdej przestrzeni metrycznej możemy wprowadzić pojęcie granicy ciągu w analogiczny sposób jak definiuje się granicę ciągu liczbowego.

Definicja 19 (granica ciągu)**.** *Niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X, d), oraz $g \in X$. Wtedy*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = g \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \ n_0 < n \longrightarrow d(x_n, g) < e.$$

Podobnie jak dla granic ciągów liczbowych każdy ciąg ma co najwyżej jedną granicę. Aby się o tym przekonać, załózmy, że mamy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do dwóch różnych $g, g' \in X$. Wtedy $d(g, gi) > 0$. Biorąc $\epsilon = d(g, g')$ istnieją $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$(\forall n \in \mathbb{N})n > n_0 \longrightarrow d(x_n, g) < \epsilon/2$$

oraz

$$(\forall n \in \mathbb{N})n > n_1 \longrightarrow d(x_n, g') < \epsilon/2.$$

Wtedy dla dowolnego $n > \max\{n_0, n_1\}$ mamy

$$d(g, g') \leq d(g, x_n) + d(x_n, g') = d(x_n, g) + d(x_n, g') < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon = d(g, g'),$$

więc mamy $d(g, g') < d(g, g')$, co jest niemożliwe.

Wykorzystując pojęcie granicy, mozemy scharakteryzować zbiory domkniete w przestrzeni metrycznej.

Fakt 4. *Zbiór A jest domknięty w przestrzeni metrycznej (X, d) wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ i każdego $g \in X$, jeżeli $\lim_{n\to\infty} x_n = g$, to $g \in A$.*

Fakt ten wynika bezpośrednio z piewszej własności domknięcia zbioru w Fakcie 2.

7.2. **Przestrzenie zupełne.** Tak jak wspomnieliśmy na początku tego rozdziału zupełność przestrzeni metrycznej odgrywa ważną rolę w teorii gier nieskończonych jak na przykład gra Banacha-Mazura czy gra Gale-Stewarta. W zwiazku z czym, przybliżymy podstawowe własności przestrzeni zupełnych oraz przykłady takich przestrzeni.

Powiemy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej jest zbieżny, jeżeli istnieje $g \in X$ taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = g$.

Natomiast ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego (albo ciągiem podstawowym) jeżeli zachodzi następujący warunek

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})n_0 < m, n \longrightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Zauważmy, że kazdy ciąg zbieżny w X jest ciągiem podstawowym. Fakt ten uzasadnimy następujaco. Wybierzmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, który jest zbieżny do pewnego $g \in X$, niech $\epsilon > 0$ to jest takie $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n > n_0$ zachodzi $d(x_n, g) < \epsilon/2$. Niech m, n bedą dowolnymi liczbami naturalnymi wiekszymi od n_0. Wtedy na podstawie nierówności trójkąta, mamy

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, g) + d(g, x_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Wobec dowolności wyboru $\epsilon > 0$ nasz ciag $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem podstawowym.

Zauważmy, że na podstawie twierdzenia Cauchy'ego z analizy matematycznej, wiemy, że kazdy ciąg podstawowy jest ciągiem zbieżnym. Każda przestrzeń metryczna, dla której zachodzi taka sama implikacja nazywana jest przestrzenią zupełną. W takim razie przejdźmy do definicji zupełności przestrzeni metrycznej.

Definicja 20 (przestrzeń zupełna)**.** *Powiemy, że przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna jeżeli spełniony warunek:*

$$(\forall x \in X^{\mathbb{N}})(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)d(x(m), x(n)) < \epsilon \longrightarrow (\exists g \in X) \lim_{n\to\infty} x(n) = g.$$

Tak jak wspommnieliśmy wcześniej, twierdzenie Cauchy'ego gwarantuje nam, że prosta rzeczywista z jej naturalną metryką jest przestrzenią zupełną. Mając dwie przestrzenie metryczne $(X-i, d_i)$ $i \in \{0,1\}$, łatwo przekonujemy się, że $X_0 \times X_1$ jest też przestrzenią metryczną dla obydwu funkcji ρ, ρ'

$$\rho((x,y),(x',y')) = d_0(x,x') + d_1(y,y'),$$

oraz

$$\rho'((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_0(x,x')^2 + d_1(y,y')^2}.$$

Zauważmy, że we wspomnianych obydwu metrykach zdefiniowanych na przestrzeniach $(X_0,d_0),(X_1,d_1)$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (p,g) \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = p \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = g$$

Powyższa własność zachodzi dla iloczynu skończenie wielu przestrzeni metrycznych. Ponadto, jeżeli wszytkie te przestrzenie są zupełne, to iloczyn też jest przestrzenią zupełną. Stąd kazda przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią zupełną.

Teraz podamy definicję przestrzeni Cantora 2^ω która jest zbiorem wszytkich ciagów o wartościach w zbiorze $\{0,1\}$. Niech $d: 2^\omega \times 2^\omega \to \mathbb{R}$ następująco: dla $x,y \in 2^\omega$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & f = g \\ 2^{-\min\{n\in\mathbb{N}:\ f(n)\neq g(n)\}} & f \neq g. \end{cases}$$

Opiszemy kulę w przestrzeni Cantora.

Twierdzenie 17. *Niech* $f \in 2^\omega$, $r > 0$ *to*

$$B(x,r) = \{g \in 2^\omega :\ f \restriction m = g \restriction m\},$$

gdzie $m = \min\{n \in \mathbb{N} :\ 2^{-n} < r\}$.

Dowód. Niech $m = \min\{n \in \mathbb{N} :\ 2^{-n} < r\}$ i

$$C = \{g \in 2^\omega :\ f \restriction m = g \restriction m\}.$$

Dla różnych $f,g \in 2^\omega$ niech $m(f,g) = \min\{n \in \mathbb{N};\ f(n) \neq g(n)\}$. Jeżeli $g \notin B(f,r)$, to $r \leq d(f,g) = 2^{-m(f,g)}$, Zauważmy, że wtedy $m(f,g) < m$ czyli $f \restriction m \neq g \restriction m$. Wówczas $g \notin C$. Niech $g \notin C$, wtedy $m(f,g) < m$ a stąd $r \leq 2^{-m(f,g)}$. Wtedy mamy $r \leq 2^{-m(f,g)} = d(f,g)$ a stąd $g \notin B(f,r)$. □

Niech $2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega}\{0,1\}^n$ będzie zbiorem wszystkich skończonych ciągów zero-jedynkowych. Jeżeli $s \in \{0,1\}^n$, to $|s| = n$ będzie długością ciągu s. Dla każdego $s \in 2^{<\omega}$ możemy zdefiniować zbiór

$$[s] = \{g \in 2^\omega :\ g \restriction |s| = s\},$$

który jest kulą w 2^ω. Na podstawie powyższego twierdzenia mamy

$$\{B(f,r) :\ f \in 2^\omega \wedge R > 0\} = \{[s] :\ s \in 2^{<\omega}\}.$$

Zachodzi następujący fakt.

Fakt 5. *Dla* $s,t \in \{0,1\}^{<\omega}$ *mamy*

- $s \subseteq t \longrightarrow [t] \subseteq [s]$,
- $[s] \subseteq [t]$ *lub* $[t] \subseteq [t]$ *lub* $[s] \cap [t] = \emptyset$.

Ponadto, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} [s] = 2^\omega,$$

jeżeli $s, t \in \{0,1\}^n$ *są różne, to* $[s] \cap [t] = \emptyset$.

Zauważmy, że z powyższego faktu dla ustalonego $t \in \{0,1\}^n$ mamy $[t] = 2^\omega \setminus \bigcup_{s \in \{0,1\}^n \setminus \{t\}} [s]$, a stąd $[t]$ jest zbiorem zarówno otwartym jak i domkniętym w 2^ω.

Udowodnimy fakt, że przastrzeń Cantora jest przestrzenią zupełną.

Twierdzenie 18. *Przestrzeń* 2^ω *jest zupełna.*

Dowód. Niech będzie dany ciąg podstawowy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (2^\omega)^\mathbb{N}$. Znajdziemy ciąg $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in 2^\omega$, taki, że $\lim_{n \to \infty} f_n = a$. Ponieważ ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem podstawowym (Cauchy'ego), to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje n_0, takie, że dla dowolnych $m, n > n_n$ $d(f_m, f_n) < 2^{-m}$, co oznacza, że dla $m, n > n_0$ $f_n \restriction m = f_n \restriction m$. Więc możemy utworzyć dwa ciągi $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ takie, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $n_k \in \mathbb{N}$ oraz

(1) $n_k < n_{k+1}$,
(2) dla $n > n_k$ zachodzi $f_n(k) = a_k \in \{0,1\}$.

Pokażemy, że $lim_{n \to \infty} f_n = a$. Niech $\epsilon > 0$, wtedy istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $2^{-m} < \epsilon$. Wtedy dla każdego $n > n_m$ $f_n \restriction m = (a_0, \ldots, a_{m-1}) = a \restriction m$ a stąd dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n_m < n$ mamy

$$d(f_n, a) \leq 2^{-m} < \epsilon.$$

Ponieważ $\epsilon > 0$ było wybrane w sposób dowolny, to mamy $\lim_{n \to \infty} f_n = a$. Wobec dowolności wyboru ciągu podstawowego w 2^ω mamy, że przestrzeń Cantora jest zupełna. $\square$

Analogicznie do przestrzeni Cantora, możemy wprowadzić przestzeń Baire'a ω^ω, jako zbiór $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ z metryką d zadaną w ten sam sposób jak metryka w przestrzeni Cantora. Podobnie dowodzimy, że przestrzeń Baire'a jest zupełną przestrzenią metryczną.

Udowodnimy twierdzenia Cantora, które w swoim brzmieniu jest analogiczne do twierdzenia Cantora w przestrzeni zwartej.

Twierdzenie 19 (Cantor)**.** *Jeżeli* (X, d) *jest zupełną przestrzenią metryczną, dany jest ciąg zbiorów* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *taki, że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$

(1) $F_n \subseteq X$ *jest domknięty i niepusty,*
(2) $F_{n+1} \subseteq F_n$,

$\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$, *gdzie* $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ *jest średnicą zbioru* $A \subseteq X$, *to*

$$(\exists! y \in X) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \{y\}.$$

Dowód. Niech będzie dany ciąg $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniający założenia naszego twierdzenia. Ponieważ każdy $F_n \neq \emptyset$, to możemy wybrać $x_n \in F_n$. Pokażemy, że nasz ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem podstawowym w X. Niech będzie dane $\epsilon > 0$, to jest $n_0 \in \mathbb{N}$, takie, że dla każdego $n > n_0$ mamy $\delta(F_n) < \epsilon$. Wtedy dla wszystkich $n > n_0$ mamy

$$x_n \in F_n \subseteq F_{n_0+1}.$$

Więc dla dowolnych $m.n > n_0$ $x_n, x_m \in F_{n_0+1}$ a stąd

$$d(x_m, x_n) \leq \delta(F_{n_0+1}) < \epsilon.$$

Ponieważ ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem podstawowym, więc z zupełności przestrzeni X istnieje $y \in W$, taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Niech $m \in \mathbb{N}$ wtedy dla kazdego $n > m$ $x_n \in F_m$. Ponieważ F_m jest zbiorem domkniętym, to $y = \lim_{n\to\infty} x_n \in F_m$. Ponieważ m było wybrane w sposób dowolny, więc $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$. Ponadto, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m \subseteq F_n$ i $\delta(F_n)$ zbiega do zera, to $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$ jest zbiorem jednoelementowym. □

Wprowadzimy trzy pojęcia, mianowicie pojęcie zbioru gęstego, brzegowego oraz zbioru nigdziegęstego w przestrzeni metrycznej X. Obydwa pojęcia posłużą nam do sformułowania udowodnionego przez Bair'e, które jak się przekonamy odgrywa istotną rolę w grach nieskończonych.

Definicja 21. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i $A \subseteq X$, to wtedy*

- *A jest zbiorem gęstym w X, jeśli $\overline{A} = X$,*
- *A jest zbiorem brzegowym w X, jeśli $(\forall x \in X)(\forall r > 0) B(x, r) \setminus A \neq \emptyset$,*
- *A jest zbiorem nigdziegęstym, jeżeli $\overline{A}$ jest zbiorem brzegowym.*

Ponadto, powiemy, że przestrzeń X jest ośrodkowa, jeśli istnieje przeliczalny podzbiór gęsty w X.

Zbiory $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ są zbiorami gęstymi i brzegowymi ale żeden z nich nie jest zbiorem nigdziegęstym. Każdy singleton $\{x\}$ jest zbiorem nigdziegęstym w $\mathbb{R}$.

Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to każdy jej podzbiór domknięty, który jest brzegowy jest zbiorem nigdziegęstym w X.

Przejdziemy teraz do zapowiedzianego twierdzenia Baire'a.

Twierdzenie 20 (Baire'a). *Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem zbiorów nigdziegęstych w X. Wtedy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jest zbiorem brzegowym.*

Dowód. Jeżeli każdy zbiór A_n jest nigdziegęsty, to także $\overline{A_n}$ jest zbiorem nigdziegęstym w X. Więc możemy założyć, że każdy A_n jest zbiorem domkniętym nigdziegęstym w X. Wybierzmy dowolny $x \in X$ i liczbę rzeczywistą $r > 0$. Zbudujemy dwa ciągi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

(1) jeżeli $n = 0$, to $x_0 = x$ i $r_0 = r$,
(2) $0 < r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$,
(3) $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq B(x_n, r_n)$,
(4) $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \cap \bigcup_{k<n+1} A_k = \emptyset$.

Załóżmy, że mamy skonstruowane ciągi $(x_n)_{n<m+1}$ i $(r_n)_{n<m+1}$. Wtedy mamy

$$\overline{B(x_m, r_m)} \cap \bigcup_{k \leq m-1} A_k = \emptyset.$$

Ponieważ A_m jest zbiorem nigdziegęstym w X, to jest $x_{m+1} \in B(x_m, r_m$ taki, że $x_{m+1} \notin A_m$. Ponieważ A_m jest domknięty w X, to istnieje $r_{m+1} > 0$ taki że $r_{m+1} < \frac{1}{m+1}$ i $\overline{B(x_{m+1}, r_{m+1})} \cap A_m = \emptyset$. Więc na podstawie założenia indukcyjnego mamy $\overline{B(x_{m+1}, r_{m+1})} \cap \bigcup_{k<m+1} A_k = \emptyset$. Tak więc krok indukcyjny został wykonany. Na podstawie twierdzenia o indukcji matematycznej mamy ciągi które spełniają wszystkie powyższe warunki dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, niech $F_n = \overline{B(x_n, r_n)}$. Wówczas, każdy F_n jest zbiorem domkniętym w X, zawiera F_{n+1} i $\delta(F_n) \leq r_n < \frac{1}{n}$ dla $n > 0$. Na podstawie twierdzenia Cantora istnieje $y \in X$ taki, że

$$\{y\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq F_1 = \overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0) = B(x, r).$$

Ponieważ dla każdego $m \in \mathbb{N}$ mamy

$$A_m \cap \{y\} = A_m \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq A_m \cap F_m = \emptyset,$$

to $y \in B(x, r) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, co wobec dowolności wyboru $x \in X$ i $r > 0$, kończy dowód naszego twierdzenia. □

7.3. **Zbiory pierwszej kategorii Baire'a, własność Baire'a.** Na podstawie twierdzenia Baire (patrz twierdzenie 20) przeliczalna suma zbiorów nigdziegęstych w przestrzeni zupełnej X nie pokrywa X. Mianowicie, każdy podzbiór $A \subseteq X$ jest elementem $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ taka, że

- $(\forall n \in \mathbb{N})$ F_n jest domknięty i nigdziegęsty w $X\}$,
- $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Nietrudno jest się przekonać, że rodzina $\mathcal{M}$ stanowi σ-ideał właściwy w X, tzn.

- dla każdych $A, B \in P(X)$, jeśli $C \subseteq A$ i $A \in \mathcal{M}$, to $C \in \mathcal{M}$,
- $(\forall \mathcal{F}) |\mathcal{F}| \leq \aleph_0 \wedge \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{M}$,
- $X \notin \mathcal{M}$.

W przestrzeniach metrycznych zupełnych rozważa się podzbiory, które są w pewnym sensie regularne i maja budowę związaną z σ-ideałem zbiorów pierwszej kategorii Baire'a $\mathcal{M}$ (krócej σ-ideał zbiorów mizernych albo meager).

Definicja 22 (własność Baire'a)**.** *Powiemy, że zbiór $A \subseteq X$ ma własność Baire'a w przestrzeni zupełnej X jeżeli istnieją zbiory $U \in \tau$ i $M \in \mathcal{M}$ (τ to wszystkie zbiory otwarte w X) takie, że*

$$A = U \triangle M = (U \setminus M) \cup (M \setminus U) \in \mathcal{M}.$$

Zauważmy, że $A \in BP$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór otwarty U w X taki, że $A \triangle U \in \mathcal{M}$.[1] Rodzinę wszystkich zbiorów w X, które posiadają własność Baire'a oznaczamy przez $BP(X)$, lub krócej BP jeśli wiadomo o jaką przestrzeń chodzi.

Mamy następujący twierdzenie.

Twierdzenie 21. *Jeżeli (X, d) jest zupełną przestrzenią metryczną, to BP stanowi σ-ciało w $P(X)$, tzn.*

(1) $\emptyset \in BP$,
(2) $(\forall A) A \in BP \longrightarrow A^c = X \setminus A \in BP$,
(3) $(\forall \mathcal{F}) \mathcal{F} \subseteq BP \wedge |\mathcal{F}| \leq \aleph_0 \longrightarrow \bigcup \mathcal{F} \in BP$.

Ponadto, każdy zbiór otwarty $U \subseteq X$ jest elementem BP.

Dowód. Każdy zbiór otwarty X (w szczególności zbiór pusty) ma własność Baire'a bo $\emptyset$ jest zbiorem pierwszej kategorii. Niech $A \in BP$ i U, M świadczą, że $A \in BP$. Wówczas U^c jest zbiorem domkniętym a wtedy $U^c \setminus Int(U^c)$ jest zbiorem pierwszej kategorii. Tutaj

$$Int(B) = \{x \in X : (\exists r > 0) B(x, r) \subseteq B\}$$

jest największym zbiorem otwartym zawartym w zbiorze B. Więc $U^c \setminus Int(U^c)$ jest zbiorem brzegowym i domkniętym a więc nigdziegęstym w X. Więc mamy

$$A^c \subseteq Int(U^c) \cup (U^c \setminus Int(U^c)) \cup M.$$

Pierwszy z tych zbiorów jest zbiorem otwartym, podczas gdy pozostałe dwa zbiory są pierwszej kategorii. Więc $A^c \in BP$. Niech teraz $\mathcal{F} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq BP$. To wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją U_n otwarty w X, i $M_n \in \mathcal{M}$ takie, że $A_n = U_n \triangle M_n$. Pokażemy, że $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \triangle (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \in \mathcal{M}$.

$$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n)) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus U_n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathcal{M}.$$

Z drugiej strony, postępując analogicznie mamy

$$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus A_n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathcal{M}.$$

Dowód twierdzenia jest więc zakończony. □

Przez rodzinę $Bor(X)$ wszystkich zbiorów borelowskich rozumiemy najmniejsze σ-ciało w $P(X)$, które zawiera wszystkie zbiory otwarte. W związku z powyższym twierdzeniem mamy oczywistą inkluzję $Bor(X) \subseteq BP(X)$. Zawieranie może być tutaj istotne, ponieważ $Bor(\mathbb{R})$ jest mocy $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, natomiast $|BP| = 2^{\mathfrak{c}}$ ponieważ zbiór Cantora jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$ i jest w ideale $\mathcal{M} \subseteq BP$.

[1] Tak jest, ponieważ jeśli $A = U \triangle M$ i $M \in \mathcal{M}$, to $A \triangle U = (U \triangle M) \triangle U = (M \triangle U) \triangle U = M \triangle (U \triangle U) = M \triangle \emptyset = M \in \mathcal{M}$. Na odwrót, jeśli $A \triangle U = M \in \mathcal{M}$, to $U \triangle M = U \triangle (A \triangle U) = U \triangle (U \triangle A) = (U \triangle U) \triangle A = \emptyset \triangle A = A$.

7.4. **Przestrzeń polska.** Przestrzenie polskie są intensywne badane od początku XX wieku do chwili obecnej. Wiele klasycznych przykładów przestrzeni metrycznych są właśnie przestrzeniami polskimi jak naprzykład n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$, kostka Hilberta $[0,1]^{\mathbb{N}}$, przestrzeń $\mathcal{C}([0,1])$ rzeczywistych funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$ oraz ich domknięte podzbiory. Przejdźmy więc do definicji przestrzeni polskich.

Definicja 23 (przestrzeń polska)**.** *Powiemy, że przestrzń metryczna (X,d) jest przestrzenią polską jeżeli X jest zupełną i ośrodkową przestrzenią metryczną.*

Tak jak już wspomnieliśmy, każda przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jak również n-wymiarowa kostka $[0,1]^n$ jest przestrzenią polską. W poprzednim porozdziale udowodniliśmy, że przestrzeń 2^ω jest przestrzenią metryczną zupełną. Łatwo jest zauważyć, że 2^ω jest przestrzenią ośrodkową z uwagi na to, że zbiór

$$\{x \in 2^\omega : (\exists m \in \mathbb{N})(\forall n > m)\ x(n) = 0\}$$

jest zbiorem gęstym w 2^ω i przeliczalnym. Więc 2^ω jest przestrzenią polską. Podobnie przestrzeń Baire'a ω^ω jest zupełną ośrodkową przestrzenią metryczną.

Przejdźmy do przykładu, jakim jest kostka Hilberta.

Przykład 4 (kostka Hilberta)**.** *Niech $[0,1]^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów o wartościach w przedziale $[0,1]$. Definiujemy metrykę $d : [0,1]^{\mathbb{N}} \times [0,1]^{\mathbb{N}}$ następująco: dla dowolnych $x, y \in [0,1]^{\mathbb{N}}$*

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-(n+1)}|x(n) - y(n)|.$$

Nietrudno zauważyć, że $([0,1]^{\mathbb{N}}, d)$ jest przestrzenią metryczną.

Pokażemy, że kostka Hilberta jest przestrzenią polską. dla zupełności kostki Hilberta, dowód przeprowadzimy wprost z definicji zupełności przestrzeni metrycznej. Niech będzie dany ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w kostce Hilberta. Ustalmy pewną liczbę $k \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że ciąg $(\pi_k(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w odcinku $I = [0,1]$, (tutaj $\pi_k(x) = x(k)$ dla $x \in [0,1]^{\mathbb{N}}$). Niech będzie dane $\epsilon > 0$, wtedy istnieje $n_k \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $m, n > n_k$ mamy

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{|x_m(i) - x_n(i)|}{2^{i+1}} < \epsilon/2^{k+1}.$$

Wtedy

$$|x_m(k) - x_n(k)|/2^{k+1} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{|x_m(i) - x_n(i)|}{2^{i+1}} < \epsilon/2^{k+1}$$

a stąd dla $m, n > n_n$ mamy $|\pi_k(x_m) - \pi_k(x_n)| < \epsilon$. Wówczas, ze zwartości odcinka $[0,1]$ istnieje liczba $a_k \in [0,1]$ taka, że $\lim_{n\to\infty} \pi_k(x_n) = a_k$. Udowodnimy, że $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, gdzie $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Niech $\epsilon > 0$, to istnieje takie $m \in \mathbb{N}$, że $\sum_{i>m} 2^{-(i+1)} < \epsilon/2$. Wówczas dla każdego $k \leq m$ istnieje liczba n_k taka, że dla każdego $n > n_k$

$$|x_n(k) - a_k| = |\pi_k(x_n) - a_k| < \epsilon/4.$$

Niech $N = \max\{n_k : k \leq m\} \in \mathbb{N}$, *to dla kazdego* $n > N$ *mamy*

$$d(x_n, a) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_n(k) - a_k|}{2^{k+1}} = \sum_{k\leq m} \frac{|x_n(k) - a_k|}{2^{k+1}} + \sum_{k>m} \frac{|x_n(k) - a_k|}{2^{k+1}}$$

$$\leq \sum_{k\leq m} \frac{\epsilon/4}{2^{k+1}} + \sum_{k>m} \frac{1}{2^{k+1}} < \epsilon/4 \sum_{k\leq m} +\epsilon/2 < (\epsilon/4)\cdot 2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Tak więc zupełność kostki Hilberta została dowiedziona.

Pokażemy, że $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *jest przestrzenią ośrodkową. Wystarczy zauważyć, że zbiór*

$$D = \{x \in [0,1]^{\mathbb{N}} : (\forall k \in \mathbb{N})(x(k) \in \mathbb{Q}) \land (\exists m \in \mathbb{N})(\forall n > m)x(n) = 0\}$$

jest zbiorem przeliczalnym. Tak jest bo D *jest przeliczalną sumą zbiorów przeliczalnych* $\{D_m : m \in \mathbb{N}\}$, *gdzie dla każdego* $m \in \mathbb{N}$, D_m *definiujemy nastepująco:*

$$D_m = \{x \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \ (\forall k \leq m)x_(k) \in \mathbb{Q} \land (\forall n > m)x(n) = 0\}.$$

Pokażemy, że D *jest gęsty w* $[0,1]^{\mathbb{N}}$. *Niech* $B(x,r)$ *będzie kulą w* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *o promieniu* $r > 0$ *w punkcie* $x \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. *Wtedy istnieje takie* $m \in \mathbb{N}$, *że* $\sum_{k>m} 2^{-(k+1)} < r/2$. *Dla każdego* $k \leq m$ *wybierzmy liczbę wymierną* $a_k \in [0,1]$ *taką, że* $|x(k) - a_k| < r/4$. *Niech* $a \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *będzie zdefiniowane nastepująco:*

$$(\forall k \in \mathbb{N})a(k) = \begin{cases} a_k & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases}$$

Wtedy oczywiście $a \in D_m \subseteq D$ *oraz*

$$d(x,a) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x(k) - a(k)|}{2^{k+1}} = \sum_{k\leq m} \frac{|x(k) - a(k)|}{2^{k+1}} + \sum_{k>m} \frac{|x(k) - a(k)|}{2^{k+1}}$$

$$= \sum_{k\leq m} \frac{|x(k) - a_k|}{2^{k+1}} + \sum_{k>m} \frac{|x(k)|}{2^{k+1}}$$

$$= \sum_{k\leq m} \frac{r/4}{2^{k+1}} + \sum_{k>m} \frac{1}{2^{k+1}} < (r/4)\cdot 2 + r/2 = r.$$

Więc $a \in B(x,r)$ *a stąd* $D \cap B(x,r) \neq \emptyset$. *Wobec dowolności wyboru* $r > 0$ *i* $x \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *dostajemy ośrodkowość kostki Hilberta.*

Ostatecznie pokazaliśmy, że kostka Hilberta jest przestrzenią polską.

Przestrzenie polskie są niedużymi zupełnymi przestrzeniami metrycznym, co ilustruje następujace twierdzenie.

Twierdzenie 22. *W każdej przestrzeni polskiej* X *istnieje przeliczalna baza wszystkich zbiorów otwartych, tzn. istnieje rodzina* $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ *taka, że:*

(1) $(\forall B \in \mathcal{B})B$ *jest otwarty w* X,
(2) $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$,
(3) $(\forall U \in \tau(X) \setminus \{\emptyset\})(\exists B \in \mathcal{B})(B \subseteq U)$.

tutaj $\tau(X)$ jest rodziną wszystkich zbiorów otwartych w X.

Dowód. Ponieważ przestrzeń (X,d) jest polska, to istnieje przeliczalny gesty w X zbiór $D \subseteq X$. Niech $\mathcal{B}$ będzie dana następująco:

$$\mathcal{B} = \{B(x,r) : \ x \in D \wedge r \in (,\infty) \cap \mathbb{Q}\}.$$

Oczywiście rodzina $\mathcal{B}$ jes przeliczalna rodziną zbiorów otwartych. Pokażemy, że ostatni warunek w twierdzeniu jest spełniony. Niech U będzie dowolnie wybranym niepustym zbiorem otwartym w X. Wtedy istnieją $y \in U$, $r_y > 0$, takie, że $B(y,r_y) \subseteq U$. Niech $r \in (0,r_y) \cap \mathbb{Q}$ oraz $x \in D$ taki, że $x \in B(y,r/2)$. Oczywiście $B(x,r/2) \in \mathcal{B}$. Udowodnimy, że $B(x,r/2) \subseteq B(y,r)$. Niech $z \in B(x,r/2)$, to wtedy

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < r/2 + r/2 = r,$$

wobec dowolności wyboru $z \in B(x,r/2)$ mamy $B(x,r/2) \subseteq B(y,r)$. Stąd, na podstawie założenia, że $< r < r_y$ mamy

$$B(x,r/2) \subseteq B(y,r) \subseteq B(y,r_y) \subseteq U,$$

co należało wykazać. Z konstrukcji zbioru otwartego $B(x,r/2)$ wynika coś więcej, mianowicie fakt, że $y \in B(x,r/2) \in \mathcal{B}$. □

Przejdźmy do pojęcia punktu izolowanego w ustalonym podzbiorze przestrzeni polskiej. Niech $A \subseteq X$, to $x \in A$ jest punktem izolowanym w zbiorze A jeśli istnieje $r > 0$ takie, że

$$A \cap (B(x,r)) = \{x\}.$$

Wsród wszystkich zbiorów domkniętych w ustalonej przestrzeni polskiej, mozna wyróżnić te, które nie mają punktów izolowanych. Takie zbiory nazywamy zbiorami doskonałymi.

Odcinek $[0,1]$ jest zbiorem doskonałym, natomiast $[-1,0] \cup \{\frac{1}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$ jest zbiorem domkniętym ale nie jest zbiorem doskonałym.

Udowodnijmy następujący fakt.

Fakt 6. *Niech (X,d) będzie przestrzenią polska i będzie dany $A \subseteq X$. Wtedy zbiór punktów izolowanych w A jes co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnej przestrzeni polskiej X i dowolnego zbioru $A \subseteq X$ zbiór punktów izolowanych w A jest zbiorem przeliczalnym. Mianowicie, jeżeli X jest przestrzenią polską, to z twierdzenia 22 wynika istnienie przeliczalnej bazy $\mathcal{B}$ zbiorów otwartych w X. Jeżeli $a \in A$ jest izolowany w A, to jest $B \in \mathcal{B}$, taki, że $A \cap B = \{a\}$. Niech $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$ będzie zdefiniowana następująco:

$$\mathcal{R} = \{B \in \mathcal{B} : \ (\exists a \in A) B \cap A = \{a\}\}.$$

Niech $A_0 \subseteq A$ będzie zbiorem punktów izolowanych w A. Niech $f : \mathcal{R} \to A_0$ będzie określona nastepująco. Dla każdego $B \in \mathcal{R}$ istnieje dokładnie jedno $a \in A_0$ takie, że $B \cap A = a$. Wtedy niech $f(A) = a$. Oczywiście z określenia rodziny $\mathcal{R}$ i zbioru A_0 widzimy, że f jest surjekcją na A_0 (dla każdego $a \in A_0$ zbiór $\{B \in \mathcal{R} : B \cap A = \{a\}\}$ jest niepusty). Ponieważ $\mathcal{R}$ jest rodziną przeliczalną, to $A_0 = f[\mathcal{R}]$ jest zbiorem przeliczalnym. □

Stosując fakt sformułowany przed chwilą, mamy następujące twierdzenie..

Fakt 7. *Każdy zbiór domknięty w przestrzeni polskiej rozłączną jest sumą pewnego zbioru doskonałego i przeliczalnej liczby punktów izolowanych.*

Dowód. Korzystając z twierdzenia 22 o istnieniu bazy przeliczalnej, niech $\mathcal{B}$ będzie taką bazą. Niech $A_0 = A$, $C_0 \subseteq A = A_0$ jest zbiorem punktów izolowanych w $A = A_0$. Jeżeli $C_0 \neq \emptyset$, to z poprzedniego faktu wiemy, że C_0 jest przeliczalnym zbiorem. Niech $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{B}$ będzie oreślony podobnie jak w poprzednim fakcie:

$$\mathcal{R}_0 = \{B \in \mathcal{B} :\ (\exists a \in C_0) B \cap A_0 = \{a\}\}.$$

Wtedy mamy

$$A_0 \cap \bigcup \mathcal{R}_0 = C_0,$$

więc $A_0 \setminus C_0$ i $\bigcup \mathcal{R}_0$ są rozłączne. Ponieważ $\bigcup \mathcal{R}_0$ jest zbiorem otwartym, to zbiór

$$A_0 \setminus C_0 = A_0 \cap (\bigcup \mathcal{R}_0)^c$$

jest zbiorem domkniętym zawartym w A_0. Niech $A_1 = A_0 \setminus C_0$. Niech

$$C_1 = \{a \in A_1 :\ (B \in \mathcal{B}) B \cap A_1 = \{a\}\}$$

tzn. zbiorem punktów izolowanych w A_1. Na mocy poprzedniego faktu, zbiór C_1 jest również zbiorem przeliczalnym. Załóżmy, że $C_1 \neq \emptyset$ i $a \in C_1$. Ponieważ A_1 i $\bigcup \mathcal{R}_0$ są zbioremi rozłącznymi, to istnieje $B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{R}_0$ takie, że $B \cap A_0 = \{a\}$. Tak więc istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{B}$ taka, że $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset$ i dla każdego $a \in C_1$ istnieje $B \in \mathcal{R}_1$ taki, że $B \cap A_1 = \{a\}$. Reasumując, mamy

(1) $A_1 = A_0 \setminus C_0 = A_0 \cap (\bigcup \mathcal{R}_0)^c$,
(2) $C_1 \subseteq A_1$ - zbiór punktów izolowanych w A_1,
(3) $A_1 \cap (\bigcup \mathcal{R}_1) = C_1$,
(4) $(\forall a \in C_1)(\exists B \in \mathcal{R}_1) A_0 \cap B = \{a\}$,
(5) $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset$,

Kontynuując ten proces, możemy utworzyć ciąg pozaskończony $(A_\xi, C_\xi) : \xi < \kappa$ długości κ taki, że $\kappa = 2^{|X|}$ (tyle jest podzbiorów w X). Dla każdego $\alpha < \kappa$ zachodzą następujące warunki:

(1) jeżeli $\alpha = \beta + 1$, to
  (a) $A_\alpha = A_\beta \setminus C_\beta$,
  (b) $C_\alpha = \{a \in A_\alpha :\ (\exists B \in \mathcal{B}) A_\beta \cap B = \{a\}\}$ - punkty izolowane w zbiorze A_α,
  (c) $\mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathcal{B} \wedge \mathcal{R}_\alpha \cap (\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{R}_\xi) = \emptyset$,
  (d) $A_\alpha = A_\beta \cap (\bigcup \mathcal{R}_\beta)^c$, (więc A_α jest domknięty o ile A_β taki był),
  (e) $(\forall a \in C_\alpha)(\exists B \in \mathcal{R}_\alpha) A_\beta \cap B = \{a\}$,
  (f) $A_\alpha \cap (\bigcup \mathcal{R}_\alpha) = C_\alpha$,
(2) jeżeli α jest liczbą graniczną ($\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \xi$), to
  (a) $A_\alpha = \bigcap_{\xi<\alpha} A_\xi$,
  (b) $C_\alpha = \{a \in A_\alpha :\ (\exists B \in \mathcal{B})\ A_\alpha \cap B = \{a\}$ - punkty izolowane w A_α,
  (c) $\mathcal{R}_\alpha = \{B \in \mathcal{B} :\ (\exists a \in C_\alpha)\ B \cap A_\alpha = \{a\}\}$.

Zauważmy, że jest takie γ, że $A_\gamma = A_{\gamma+1}$, a wtedy $C_\gamma = \emptyset$ (możemy założyć, że takie γ jest najmniejsze). W takim razie $A_\gamma \subseteq A$ jest domkniętym podzbiorem X, który nie posiada punktów izolowanych. Ponieważ rodzina $\{\mathcal{R}_\xi : \xi < \gamma\}$ jest parami rozłączna, której suma jest podzbiorem $\mathcal{B}$, to γ musi być liczbą przeliczalną. Zauważmy, że dla każdego $\xi < \gamma$ C_ξ jest zbiorem przeliczalnym, więc $\bigcup_{\xi<\gamma}$ jest również zbiorem przeliczalnym oraz zachodzi równość:

$$A_\gamma = A \setminus (\bigcup_{\xi<\gamma} C_\xi).$$

Więc A_γ i $\bigcup_{\xi<\gamma} C_\xi$ jest żądanym rozkładem zbioru A. □

Analizując powyższy dowód, dochodzimy do wniosku, że występująca tam przeliczalna liczba porządkowa $\gamma < \omega_1$ jest tzw. rangą Cantora-Bendixona zbioru A. Dla kompletności wypiszemy definicję tego pojęcia.

Definicja 24 (ranga Cantora-Bendixona)**.** *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $A \subseteq X$, to liczbę porządkową γ nazwiemy rangą Cantora-Bendixona zbioru A, jeżeli istnieje taki ciąg (on jest jedyny) $\{A^\xi : \ \xi \leq \gamma\}$ taki, że dla każdego $\alpha \leq \gamma$ zachodzi*

(1) *jeśli $\alpha = 0$, to $A^\alpha = A$,*
(2) *jeśli $\alpha = \beta + 1$, to*

$$A^\alpha = (A^\beta)' = A^\beta \setminus \{a \in A^\beta : (\exists U \in \tau(X))U \neq \emptyset \longrightarrow U \cap A^\beta = \{a\}\},$$

(3) *jeśli α jest graniczna, to $A^\alpha = \bigcap_{\xi<\alpha} A^\xi$*

i γ jest najmiejszą liczbą porządkową, dla której zachodzi warunek

$$A^\gamma = (A^\gamma)' = A^\gamma \setminus \{a \in A^\gamma : (\exists U \in \tau(X))U \neq \emptyset \longrightarrow U \cap A^\gamma = \{a\}\}.$$

W przypadku przestrzeni polskich ranga Cantora-Bendixona dowolnego podzbioru jest mniejsza niż ω_1 (ω_1 - pierwsza nieprzeliczalna liczba porządkowa).

Mając zadany pozdzbiór A przestrzeni polskiej X, to pochodną A definiujemy jako

$$A' = \{a \in A : \ (\exists B \in \tau \setminus \{\emptyset\})(B \cap A = \{a\},$$

czyli tak samo, jak zbiór A_1 w definicji rangi zbioru A. Jeżeli A jest zbiorem domkniętym i $A' = A$, to A jest zbiorem doskonałym i jedo ranga jest równa 0. Na odwrót, jeżeli ranga zbioru dokniętego jest równa zero, to jest on zbiorem doskonałym.

Przykład 5. $[0, 1]' = [0, 1]$*, więc* $[0, 1]$ *jest zbiorem doskonałym. Natomiast ranga zbioru*

$$B = [0, 1] \cup \left\{1 + \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

jest równa 1*, bo $B' = [0, 1] \neq B$, natomiast $B'' = [0, 1]' = [0, 1] = B'$. Oczywiście B nie jest zbiorem doskonałym.*

Łatwo sprawdzić, że zbiór

$$C = [0, 1] \times \{0\} \cup \left\{(1 + \frac{1}{n+1}, 0) : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{(1 + \frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}) : \ m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

ma rangę równą 2. *Tak jest, ponieważ*

$$C' = [0,1] \times \{0\} \cup \left\{ (1 + \frac{1}{n+1}, 0) : \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$C'' = [0,1] \times \{0\}$$

oraz

$$C''' = (C'')' = [0,1] \times \{0\} = C''.$$

8. Gry topologiczne

Tak jak wspomnieliśmy wcześniej, pierwszą grą nieskończoną, bo w 1935 roku zaproponował Stanisław Mazur. W związku z zaproponowaną grą, Mazur zapytał, czy dla zbiorów pierwszej kategorii Baire'a drugi gracz ma strategię zwycieską. Stefan Banach odpowiedział na to pytanie twierdząco.

8.1. **Gra Banacha-Mazura.**

Definicja 25 (Gra Banacha-Mazura)**.** *Niech* (X,d) *będzie przestrzenią polską oraz* $A \subseteq X$ *będzie niepustym podzbiorem* X*. Dwuosobową grę* G_A *nazywamy grą Banacha-Mazura, jesli*

(1) *grę zaczyna gracz* I*,*
(2) *gracze grają na przemian zbiorami otwartymi,*
(3) *dla liczby nanturalnej* $n \in \mathbb{N}$ *w* $2n+1$*-ruchu gracz* I *gra zbiorem* U_{2n}*,*
(4) *gracz* I *w* $2n+2$*-ruchu gracz* II *gra zbiorem* U_{2n+1}*,*
(5) *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \subseteq U_n$*.*

Gracz I *wygrywa, jeśli* $A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$*, w przeciwnym razie wygrywa gracz* II*.*

Twierdzenie 23 (Banach-Mazur)**.** *Niech* (X,d)*-zupełna przestrzeń metryczna,* $A \subseteq X$ *posiada własność Baire'a. Niech* G_A *będzie grą Banacha-Mazura, wtedy*

(1) *jeżeli* $A \notin \mathcal{M}$*, to gracz pierwszy ma strategię wygrywającą,*
(2) *jeżeli* $A \in \mathcal{M}$*, to drugi gracz ma strategię wygrywającą.*

Powyższe twierdzenie mówi, że każda gra Banacha-Mazura jest grą zdeterminowaną, tzn. któryś z graczy ma strategię wygrywającą.

Dowód. Niech $A \subseteq X$ będzie zbiorem który ma własność Baire'a i nie jest pierwszej kategorii. Pokażemy, że I gracz ma strategię wygrywającą w grze G_A. Z założenia istnieje niepusty zbiór otwarty $U \subseteq X$ taki, że $A \triangle U \in \mathcal{M}$, tzn istnieje rodzina $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ zbiorów domkniętych i nigdziegęstych taka, że $(A \setminus U) \cup U \setminus A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Bez straty ogólności, możemy tutaj założyć, że $F_n \subseteq F_{n+1}$.

W grze G_A gracz I wybiera ciąg zbiorów otwartych $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, natomiast gracz II wybiera zbiory otwarte $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w taki sposób, że

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ (U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq U_n)$$

i grę zaczyna gracz I (gracze grają naprzemian). W pierwszym ruchu gracz I wybiera $U_0 = U$. Następnie Po wybraniu zbioru V_0 przez drugiego gracza, gracz I wybiera $U_1 = B(x_1, r)$

w taki sposób, że $\overline{B(x_1,r)} \subseteq V_1$ i $\overline{B(x_1,r_1)} \cap F_0 = \emptyset$. Załózmy, że każdy z graczy wykonali n ruchów $(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}$ o następujących własnościach: dla każdego $k < n-1$

(1) $k = 0 \longrightarrow U_k = U$,
(2) jeśli $0 < k$, to
  (a) $U_k = B(x_k, r_k,)$ i $r_{k+1} < r_k$,
  (b) $\overline{B(x_1,r_1)} \subseteq U$,
  (c) $\overline{B(x_k,r_k)} \subseteq V_k \setminus F_k$.

Postępując analogicznie jak w pierwszym ruchu w ruchu, gdy gracz I ma wykona n-ty ra ruch, to gra zbiorem otwartym U_n tak, że

- $U_n = B(x_n, r_n$, gdzie $r_n < r_{n+1}$, $x_n \in V_{n-1} \subseteq U_{n-1}$,
- $\overline{B(x_n,r_n)} \subseteq V_{n-1}$ i $\overline{B(x_n,r_n)} \cap F_n = \emptyset$.

Taki ruch gracza I jest możliwy, ponieważ V_{n-1} jest zbiorem otwartym, więc istnieje takie $x \in V_{n-1}$, że $x \notin F_n$ a więc (założenia, że $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący) $x \notin \bigcup_{k<n+1} F_k$. Ale $F_n^c \cap V_{n-1}$ jest otwarty w X, to istnieje $r > 0$ tkie, że $B(x,r) \subseteq V_{n-1\setminus F_n}$. Biorąc $x_n = x$ i $r_n = r/2$ mamy $B(x_n, r_n) \subseteq V_{n-1}$ i $\overline{(B(x_n,r_n)} \cap F_n = \emptyset$. Wtedy kładziemy $U_n = B(x_n, r_n)$. Tak więc krok indukcyjny możemy wykonać w tej konstrukcji. Zbiór wszystkich ciągów $(U_0, V_0, \ldots, V_{n-1}, U_n)$ spełniające powyższe warunki zadają żądaną strategię gracza I.

Teraz rozważmy sytuację, w której zbiór A jest pierwszej kategoeii Baire'a. Wówczas w grze G_A gracz II wybiera dowolny otwarty niepusty podzbiór V_0 zbioru otwartego U_0 jaki zagrał gracz I. Następnie, gracz II przyjmuje wygrywającą strategię gracza I w grze $G_{X\setminus A}$ opisaną wyżej (zbiór $X \setminus A$ nie jest zbiorem pierwszej kategorii Baire'a ale posiada własność Baire'a). □

8.2. **Gra Gale-Stewarta.**

Definicja 26 (Gra Gale-Stewarta). *Niech będzie dany niepusty zbiór $A \subseteq \omega^\omega$. Niech $N = \{I, II\}$ będzie zbiorem graczy w następującej grze Γ_A. Grę zaczyna gracz I i gracze grają naprzemiennie wybierając liczbę naturalną. Gracz I wybiera a_0, następnie gracz II wybiera liczbą b_0, gracz I wybiera liczbę a_1, itd. Gracz I wygrywa grą Γ_A jeżeli*

$$(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots) \in A,$$

w przeciwnym wypadku, grę Γ_A wygrywa gracz II.

Definicja 27 (Strategia gracza). *Niech Γ_A będzie grą Gale-Stewarta, to każda funkcja $\sigma : \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbb{N}^{2n} \to \mathbb{N}$ jest strategią gracza I ($\sigma \in S_I$), natomist $\tau : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2n+1} \to \mathbb{N}$ jest strategią gracza II i wtedy $\tau \in S_2$.*

Niech $b \in \omega^\omega \cup \omega^{<\omega}$ oraz $\sigma \in S_1$, to wtedy stusjąc strategię σ mamy rozgrywkę (skończoną jeśli $b \in \omega^{<\omega}$ albo nieskończoną gdy $b \in \omega^\omega$)

$$\sigma(\emptyset) = a_0, \sigma((a_0, b_0)) = a_1, \sigma((a_0, b_0, a_1, b_1)) = a_2, \ldots$$

wtedy

$$\sigma * b = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, \ldots) \in \omega^\omega \cup \omega^{<\omega}.$$

Analogicznie dla strategii $\tau \in S_{II}$ i ciągu $a \in \omega^\omega \cup \omega^{<\omega}$

$$a * \tau = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, \ldots) \in \omega^\omega \cup \omega^{<\omega}.$$

Ponadto, dla ciagu $x = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, \ldots) \in \omega^\omega \cup \omega^{<\omega}$ niech

$$\pi_I(x) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

i analogicznie

$$\pi_{II}(x) = (b_0, b_1, b_2, \ldots).$$

Powiemy, że strategia $\sigma \in S_I$ jest wygrywająca w grze Γ_A jeżeli

$$(\forall b \in \omega^\omega)\ \sigma * b \in A,$$

analogicznie $\tau \in S_{II}$ jest wygrywająca jeśli

$$(\forall a \in \omega^\omega)\ a * \tau \notin A.$$

Zauważmy, że co najwyżej jeden z graczy ma strategię wygrywającą w grze Γ_A.

Powiemy, że gra Γ_A jest grą zdeterminowaną jeśli gracz I lub gracz II ma strategię wygrywającą.

8.3. **Aksjomat determinacji.**

Definicja 28 (AD (Mycielski-Steinhaus))**.** *Każda gra Gale-Stewarta jest grą zdeterminowaną.*

Mamy dwie konsekwencję aksjomatu determinacji związanym z aksjomatem wyboru. Aksjomat wyboru mówi nam, że dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych $\mathcal{F}$ istniej funkcja wyboru, tzn. $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$, taka, że dla kazdego $A \in \mathcal{F}$ zachodzi $f(A) \in A$. Aksjomat ten oznaczmy przez AC. Natomiast przeliczalna wersja aksjomatu wyboru oznaczona przez AC_ω dotyczy jedynie rodzin przeliczalnych (tzn. $|\mathcal{F}| = \aleph_0$).

Twierdzenie 24. *Zachodzą dwie własności:*

1. $AD \longrightarrow \neg AC$,
2. $AD \longrightarrow AC_\omega$.

Dowód. Aby udowodnić pierwszą własność zauważmy, że wszystkich strategii gracza I jest continuum wiele i analogicznie mamy tyle samo wszystkich strategii dla gracza II. Ponumerujmy strategie gracza I, tj. $S_I = \{\sigma_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ i analogicznie, $S_{II} = \{\eta_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Konstruujemy zbiory rozłączne $X = \{x_\alpha \in \omega^\omega : \alpha < \mathfrak{c}\}$ i $Y = \{y_\alpha \in \omega^\omega : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tak, że dla dowolnego $\alpha < \mathfrak{c}$ mamy

1. $y_\alpha = \sigma * b$ dla pewnego $b \in \omega^\omega$,
2. $x_\alpha = a * \tau$ dla pewnego $a \in \omega^\omega$,
3. $\{x_\xi : \xi < \alpha\} \cap \{y_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$.

W kroku α zbiór $\{\sigma * b : b \in \omega^\omega\}$ ma moc continuum, więc jest takie $b \in \omega^\omega$, takie, że $\sigma * B \notin \{x_\xi : \xi < \alpha\}$. Analogicznie, $A * \eta \notin \{x_\xi : \xi < \alpha\}$. Zauważmy, że w grze Γ_X nie ma graczy posiadających wygrywającą strategię. Jeżeli wybierzemy strategię σ_α, to gracz II w grze Γ_X może zagrać takim ciągiem $b = (b_0, b_1, \ldots)$, że $y_\alpha = \sigma_\alpha * b \notin X$. Więc gracz I nie ma strategii wygrywającej. Analogicznie, gracz II nie ma strategii wygrywającej.

Aby udowodnić drugi punkt naszego twierdzenia, niech $\mathcal{F}$ będzie przeliczalną rodziną zbiorów niepustych w przestrzeni Baire'a. Ponieważ rodzina jest przeliczalna, to możemy ją ponumerować liczbami naturalnymi $\mathcal{F} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Rozważmy następującą grę Γ_A, gdzie gracze I i II wybierają naprzemian liczby $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$. Niech

$$A = \{(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots) \in \omega^\omega : \ (b_0, b_1, \ldots) \notin X_{a_0}\}.$$

Zauważmy, że gracz I nie ma strategii wygrywającej. bo jeśli wylosuje liczbe $a_0 \in \mathbb{N}$, to gracz może wyznaczyć ciąg $b = (b_0, b_1, \ldots) \in \omega^\omega$ taki, że $b \in X_{a_0}$. Gdy gracz będzie grał ciągiem b, to wygra tę gre. Z aksjomatu determinacji, któryś z grzaczy I, II ma wygrywającą strategię. Ponieważ gracz I nie ma strategii wygrywającej, to musi ją mieć gracz II. Powiedzmy, że jest to strategia τ. Teraz możemy zdefiniować funkcją wyboru. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$f(X_n) = \pi_{II}((n, 0, 0, \ldots) * \tau).$$

Oczywiście, $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $f(X_n) \in X_n$. $\square$

Aksjomat determinacji jest na tyle silnym aksjomatem, że pociąga za sobą fakt, że kazdy podzbiór odcinka $[0, 1]$ jest zbiorem mierzalnym w senise Lebesgue'a. Wiadomo, że z aksjomatu wyboru wynika istnienie podzbioru niemierzalnego w odcinku domknietym (tzw. zbiór Vitalgo).

Przez $\mathcal{LM}$ oznaczmy σ-algebrę wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Wpierw udowodnimy następujący lemat.

Lemmat 5. *Z AD wynika, że dla każdego zbioru $S \subseteq [0, 1]$ takiego, że*

$$(\forall Z) Z \subseteq S \wedge Z \in \mathcal{LM} \longrightarrow \lambda(Z) = 0$$

to $\lambda^*(S) = 0$. Tutaj λ jest miarą Lebesgue'a na odcinku $[0, 1]$.

Dowód. Pokażemy, że miara zewnętrzna zbioru S jest równa zero to znaczy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje ciąg odcinków otwartych $(I_n)_{n\in\omega}$ takich, że $S \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$ i $\sum_{n\in\omega} vol(I_n) < \epsilon$. Dla każdej liczby $a \in [0, 1]$ istnieje ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in 2^\omega$ taki, że

$$a = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

Tak więc możemy stowarzyszyć liczbę a z ciagiem $(a_0, a_, \ldots)$ poprzez powyższą formułę. Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ niech będzie dana rodzina $\mathcal{G}_n = \{G^n_k : k \in \mathbb{N}\}$ taka, że każde $G \in \mathcal{G}_n$ ma następujące własności:

(1) G jest skończoną sumą odcinków otwartych o końcach wymiernych,
(2) $\lambda(G) < \frac{\epsilon}{2^{2n}}$.

Gracze grają naprzemian $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$. Gracz I wygrywa, jeśli

(1) $a_n \in 0, 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(2) $a \in S$,
(3) $a \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G^n_{b_n}$.

Pokażemy, że gracz I nie ma strategii wygrywającej. Załóżmy, że gracz I ma strategię wygrywającą σ. Tak więc dla każdego $b \in \omega^\omega$ $\pi_I(\sigma * b) = a \in S$. Zauważmy, że funkcja $f : \omega^\omega \to \mathbb{R}$ zdefiniowana $f(b) = \pi_I(\sigma * b)$ jest funkcją ciągłą. Tak jest, bo dla każdego $r > 0$ i każdego $b \in \omega^\omega$ jest $n \in \mathbb{N}$ takie, że $2^{-n} < r$ i każdego $b' \in \omega^\omega$ jeśli $d(b, b') < 2^{-n}$ i $a = f(b)$, $a' = f(b)$, to $b \upharpoonright n = b' \upharpoonright n$ a stąd $a \upharpoonright n = a' \upharpoonright n$. Więc $|f(b) - f(b')| < 2^{-n} < \epsilon$.

Niech $Z = f[\omega^\omega]$, to wtedy z faktu, że σ jest strategią wygrywającą dla gracza I mamy $f[\omega^\omega] \subseteq S$. Zauważmy, że ciągły obraz przestrzeni Baire'a jest zbiorem mierzalnym (bo jest analityczny), to z założenia mamy, że Z jest zbiorem miary zero. Ponieważ każdy zbiór miary zero da się nakryć zbiorami $H_n \in \mathcal{G}_n$, to biorąc takie b_n, że $H_n = G^n_{b_n}$ mamy

$$a \in Z \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G^n_{b_n}.$$

Tak więc σ nie jest strategią wygrywającą dla gracza I. Wobec dowolności wyboru strategii σ, mamy że gracz I nie ma strategii wygrywającej w tej grze.

Z aksjomatu determinacji wynika, że gracz II ma strategię wygrywającą i nazwijmy ją τ. Niech będzie dany ciąg $s = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ i niech $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ będzie ciągiem wyznaczonym przez strategię τ, to wtedy definiujemy $G_s = G^n_{b_{n-1}}$. Więc dla każdego $a \in S$ istnieją $n \in \mathbb{N}$ i $G_s \in \mathcal{G}_n$ dla $s = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in 2^n$, że $a \in G_s$. Tak więc mamy

$$S \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in\{0,1\}^n} G_s$$

a stąd

$$\lambda^*(S) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{s\in 2^n} \lambda(G_s) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n \frac{\epsilon}{2^{2n}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^n} < 2\epsilon.$$

□

Twierdzenie 25. *Z AD wynika, że każdy podzbiór odcinka* $[0, 1]$ *jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.*

Dowód. Niech będzie dany zbiór $A \subseteq [0, 1]$. Wtedy istnieje zbiór borelowski $B \subseteq [0.1]$ taki, że $A \subseteq B$ i dla każdego zbioru mierzalnego Z, jeżeli $Z \subseteq B \setminus A$, to $\lambda(Z) = 0$. Z lematu 5 wynika, że $\lambda(B \setminus A) = 0$ a stąd, że A jest zbiorem mierzalnym. □

Literatura

[1] M. Maschler, E. Solan, S. Zamir, Game Theory, Cambridge University Press, 2013.
[2] K. Kuratowski, Wstęp do teorii mnogości topologii, Biblioteka Matematyczna tom 9, PWN 1977.