Topologia metryczna, Lista 1

Zbiór X z funkcją $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, spełniającą warunki

(1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
(3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

dla dowolnych $x, y, z \in X$, nazywamy *przestrzenią metryczną* z *metryką* ρ i oznaczamy jako parę (X, ρ). Elementy zbioru X nazywamy wtedy *punktami* przestrzeni metrycznej (X, ρ), a wartość metryki $\rho(x, y)$ *odległością między punktami* x, y w metryce ρ.

Średnicą niepustego podzbioru A przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest liczba $\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in X\}$, jeśli rozważany kres górny istnieje; mówimy wtedy, że zbiór A jest *ograniczony*. W przeciwnym wypadku piszemy $\operatorname{diam} A = \infty$.

Kulą o środku $x \in X$ *i promieniu* $r > 0$ w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór $K(x; r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$.

Sprawdzić, że poniższe przykłady są przestrzeniami metrycznymi.

(1) Dla dowolnego zbioru X określamy

$$\rho_{01}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = y, \\ 1 & \text{gdy } x \neq y. \end{cases}$$

Metrykę ρ_{01} nazywamy *zero-jedynkową metryką dyskretną* w zbiorze X. Opisz wszystkie kule w (X, ρ_{01}).

(2) $\rho_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_e$ (*metryka euklidesowa*), gdzie $\|\mathbf{x}\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$, (*norma euklidesowa*) dla $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Przestrzeń metryczną $(\mathbb{R}^n \rho_e)$ nazywamy *n-wymiarową przestrzenią euklidesową*.

Wskazówka: w dowodzie skorzystać z nierówności Schwarza:

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2).$$

Opisz kule w $(\mathbb{R}^n \rho_e)$ dla $n = 1, 2, 3$.

(3) W $\mathbb{R}^n$ rozważa się często dwie inne normy:
(a) $\|\mathbf{x}\|_s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
(b) $\|\mathbf{x}\|_m = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$,

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, prowadzące odpowiednio do metryk
(a) $\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_s$,
(b) $\rho_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_m$.

Narysuj kule $K((x_1, x_2); 1)$ w metrykach ρ_s i ρ_m na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

(4)

$$\rho_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \rho_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{gdy } \mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ są współliniowe}, \\ \|\mathbf{x}\|_e + \|\mathbf{y}\|_e & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (metryka "centrum" lub metryka "jeża").

(5) Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ określamy odległość punktów $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$:

$$\rho_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \rho_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{gdy } x_1 = y_1, \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

(metryka "rzeka").

Narysuj kule $K((0,0),1)$ w metrykach centrum i rzeka płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

(6) Jeśli X jest dowolnym zbiorem niepustym, a (Y,ρ)—przestrzenią metryczną, to w zbiorze $B(X,Y)$ wszystkich funkcji $f : X \to Y$ ograniczonych, to znaczy takich, /ze $\operatorname{diam} f(X) < \infty$, wprowadzamy metrykę

$$\rho_{sup}(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x)) : x \in X\}$$

(metryka ta zwana jest metryką *zbieżności jednostajnej.*

Zinterpretuj kule w metryce ρ_{sup} w zbiorze $B(I,I)$, gdzie $I = [0,1]$.

(7) Niech $C_1 = \{\, f : [0,1] \to \mathbb{R} \,:\, f \quad \text{jest ci/ag/la}\,\}$. Jest to przestrzeń z normą $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.Określamy w niej odległość wzorem $\rho(f,g) = \|f-g\|_1$.

Zinterpretuj kule w tej metryce.

(8) Grafem skończonym (nieskierowanym) nazywamy parę $G = (V,E)$ gdzie V jest zbiorem skończonym, a E jest pewnym podzbiorem zbioru $V \times V$ takim, że $(x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E$ oraz $(x,x) \notin E$. Elementy zbioru V nazywamy *wierzchołkami* grafu G, a elementy zbioru E *krawędziami* grafu. *Drogą* w G jest ciag $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, $n \geqslant 1$, taki że $(x_i,x_{i+1}) \in E$ dla $i < n$, przy czym dopuszczamy $x_0 = x_n$ (wtedy droga jest *pętlą*). Graf G jest *spójny*, gdy dla każdych dwóch różnych wierzchołków $x,y \in V$ istnieje droga $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ taka, że $x = x_0$ i $y = x_n$,

Metrykę *najkrótszej drogi* w zbiorze wierzchołków V (potocznie–w grafie G) grafu spójnego G definiujemy następująco: $\rho(x,y)$ jest długością najkrótszej drogi łączącej x i y, gdzie długością drogi jest ilość jej krawędzi.

Czym są kule o promieniach $r = 1,2,3$, gdy wierzchołkami G są wierzchołki

(a) kwadratu,
(b) czworościanu
(c) sześcianu,

a krawędzie są wyznaczone przez jego boki ?

(9) Czy niepusty przekrój dwóch kul musi być kulą?

(10) Pokazać, że w dowolnej przestrzeni metrycznej (X,ρ), jeśli $y \in K(x;r)$, to istnieje liczba $r' > 0$ taka, że $K(y;r') \subset K(x;r)$.

(11) Udowodnić, że podzbiór przestrzeni metrycznej jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest zawarty w pewnej kuli w tej przestrzeni.

(12) Sprawdzić, że jeśli A i B są ograniczonymi podzbiorami przestrzeni metrycznej (X,ρ), to suma $A \cup B$ jest zbiorem ograniczonym.