Topologia metryczna, Lista 2

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną.

Definicja 1. Zbiór $U \subset X$ nazywa się zbiorem *otwartym* w (X, ρ), gdy jest sumą kul w (X, ρ).

Zbiór $F \subset X$ nazywa się zbiorem *domkniętym* w (X, ρ), gdy dopełnienie $X \setminus F$ jest zbiorem otwartym w (X, ρ).

Wnętrzem $\operatorname{int} A$ zbioru A w (X, ρ) nazywamy sumę wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A.

Domknięciem $\operatorname{cl}(A)$ zbioru A w (X, ρ) nazywamy przekrój wszystkich zbiorów domkniętych zawierajacych A.

Brzegiem zbioru A w (X, ρ) nazywamy zbiór $\operatorname{bd}(A) = \operatorname{cl}(A) \setminus \operatorname{int}(A)$.

Zbiór A jest *gęsty* w (X, ρ), gdy $\operatorname{cl}(A) = X$.

Zbiór A jest *brzegowy* w (X, ρ), gdy $\operatorname{int}(A) = \emptyset$.

(1) Uzasadnić następujące własności zbiorów otwartych i domkniętych w (X, ρ).
   (a) Zbiory $\emptyset$ i X są otwarte i domknięte,
   (b) suma dowolnej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym,
   (c) przekrój skończonej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym,
   (d) suma skończonej ilości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym,
   (e) przekrój dowolnej ilości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

(2) Uzasadnić, że zbiór U jest otwarty w (X, ρ) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in U$ istnieje liczba $r(x) > 0$ taka, że $K(x; r(x)) \subset U$.

(3) Pokazać, że wnętrze $\operatorname{int} A$ zbioru $A \subset X$ jest największym zbiorem otwartym zawartym w A, a domknięcie $\operatorname{cl}(A)$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A.

(4) Uzasadnić równość $\operatorname{cl}(A) = \{x \in X : \forall\, r > 0\ K(x; r) \cap A \neq \emptyset\}$.

(5) Podać przykłady na prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, \rho_e)$, wskazujące, że przekrój nieskończonej ilości zbiorów otwartych nie musi być otwarty, a suma nieskończonej ilości zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym.

(6) Dla dowolnego zbioru X z metryką dyskretną $\rho_{0,1}$ wskazać wszystkie zbiory otwarte i domknięte w przestrzeni $(X, \rho_{0,1})$.

(7) Znajdź wnętrze, domknięcie i brzeg następujących podzbiorów:
$$\mathbb{R} \times \mathbb{N},\ \mathbb{R} \times [0, \infty),\ [0, 1) \times \{0\},\ \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5\},\ \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),\ \mathbb{R} \times \{0\}$$
   (a) płaszczyzny euklidesowej,
   (b) płaszczyzny z metryką "centrum".
   (c) płaszczyzny z metryką "rzeka".

(8) Niech $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie sferą w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$. Czy S^2 jest domknięty i brzegowy w $\mathbb{R}^3$? Rozważyć to samo zadanie, zastępując sferę kulą $B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

(9) Znajdź domknięcie X zbioru $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin \frac{1}{x}\right\}$ na płaszczyźnie euklidesowej. Czy S jest otwarty, gęsty, brzegowy w przestrzeni(X, ρ_e) ? A w $\mathbb{R}^2$?

(10) Czy prosta w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, jest zbiorem: domkniętym, otwartym, brzegowym, gęstym? To samo pytanie dla płaszczyzny w $\mathbb{R}^m$, $m > 2$. A gdyby w pytaniu pierwszym rozpatrywać $(\mathbb{R}^2, \rho_c)$?

(11) Znajdź wszystkie podzbiory gęste w $(\mathbb{N}, \rho_e)$.

(12) Udowodnij wzory, dla dowolnych podzbiorów A, B przestrzeni metrycznej X i podaj przykłady na istotność inkluzji:
(a) $\operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B = \operatorname{cl}(A \cup B)$
(b) $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B = \operatorname{int}(A \cap B)$
(c) $\operatorname{int} A = X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus A)$
(d) $\operatorname{cl} A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{bd} A$
(e) $\operatorname{bd}(\operatorname{int} A) \subset \operatorname{bd} A$
(f) $\operatorname{cl}(A \cap B) \subset \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$
(g) $A \subset B \Rightarrow \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B$
(h) $\operatorname{cl} A \setminus \operatorname{cl} B \subset \operatorname{cl}(A \setminus B)$
(i) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$
(j) $\operatorname{bd}(A \cup B) \subset \operatorname{bd} A \cup \operatorname{bd} B$; jeśli $A \cap \operatorname{cl} B = \emptyset = B \cap \operatorname{cl} A$, to zachodzi równość.
(k) $\operatorname{bd}(A \cap B) \subset \operatorname{bd} A \cup \operatorname{bd} B$
(l) $\operatorname{bd} A = \operatorname{bd}(X \setminus A)$
(m) $\operatorname{bd}(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{bd} A$
(n) $\operatorname{bd} A = \emptyset \Leftrightarrow A \quad$ jest otwarto-domknięty

(13) Udowodnij, że jeśli zbiór G jest otwarty w przestrzeni metrycznej X, to dla dowolnego zbioru $A \subset X$ zachodzi
(a) $G \cap \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl}(G \cap A)$
(b) $\operatorname{cl}(G \cap \operatorname{cl} A) = \operatorname{cl}(G \cap A)$

Podaj przykład na istotność inkluzji (a).