

Topologia metryczna, Lista 3

- (1) Uzasadnić stwierdzenia z wykładu dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X, ρ) :
- (1) Każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej ma dokładnie jedną granicę.
 - (2) Każdy podciąg ciągu zbieżnego do punktu $x \in X$ jest też zbieżny do x .

- (2) Zbadaj zbieżność ciągu punktów płaszczyzny

$$p_n = \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right), \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \right)$$

w metrykach $\rho_e, \rho_c, \rho_r, \rho_{01}$.

Co jest domknięciem zbioru $\{p_1, p_2, \dots\}$ na płaszczyźnie w tych metrykach?

- (3) Rozpatrujemy podprzestrzeń $(X, \rho) \subset (\mathbb{R}^2, \rho)$, gdzie $X = [0, 1] \times (0, 1)$ dla $\rho = \rho_e, \rho_c, \rho_r$. Podaj wnętrze, domknięcie i brzeg w (X, ρ) podzbiorów: $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \times (0, 1)$, $(0, 1) \times \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, $(\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 1] \times (0, 1)$, $\{(x, x) : 0 < x < 1\}$, $(\mathbb{Q} \cap (0, 1)) \times (\mathbb{Q} \cap (0, 1))$.
Czy te podzbiory są otwarte, domknięte, brzegowe, gęste w (X, ρ) ?

- (4) Metryki ρ_1 i ρ_2 w zbiorze X są *równoważne*, gdy zbieżność ciągów w przestrzeniach metrycznych (X, ρ_1) i (X, ρ_2) jest taka sama, tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, x) = 0.$$

Zbadać równoważność metryk $\rho_e, \rho_m, \rho_s, \rho_c, \rho_r, \rho_{01}$ z Listy 1 na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 .