Topologia metryczna, Lista 4

(1) Sprawdzić, że złożenie odwzorowań Lipschitza o stałych c_1 i c_2 jest odwzorowaniem Lipschitza o stałej c_1c_2.

(2) Podać przykład odwzorowania jednostajnie ciągłego, które nie jest Lipschitza.

(3) Mówimy, że przestrzenie metryczne są *homeomorficzne (podobne, izometryczne)*, gdy istnieje homeomorfizm (podobieństwo, izometria) przekształcający jedną przestrzeń na drugą. Czy każdy przedział otwarty na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ jest homeomorficzny z $\mathbb{R}$; czy jest podobny do $\mathbb{R}$? Czy istnieje funkcja jednostajnie ciągła przekształcająca go na $\mathbb{R}$?

(4) Sprawdzić, że każde dwie kule (sfery) w przestrzeni euklidesowej są do siebie podobne (czy tak jest w dowolnej przestrzeni metrycznej?) i że każdy odcinek z końcami w przestrzeni euklidesowej jest podobny do przedziału euklidesowego $[0, 1]$.

(5) Udowodnić, że dowolne dwie proste w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$, są izometryczne. To samo pokazać dla dowolnych dwóch płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$.

(6) Pokazać, że dowolny okrąg i elipsa w $(\mathbb{R}^2, \rho_e)$ oraz dowolna sfera i elipsoida w $(\mathbb{R}^3, \rho_e)$ są homeomorficzne.

(7) Sprawdzić, czy następujące przekształcenia są homeomorfizmami (w metrykach euklidesowych):
   (a) $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ dana wzorem $f(x) = (x, \sin x)$;
   (b) $f : [0, 1) \to S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$;
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x, y) = (x + y, x - y)$;
   (d) $f : C \to D$ określone wzorem $f(x, y, z) = (x, y)$, gdzie
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leqslant 2\},$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2\};$$
   jaką figurą jest C?
   (e) inwersja względem sfery $S^n(r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = r\}$:
$$i : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$$
   takie, że $i(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y}$ leży na półprostej $\mathbf{0x}$ oraz $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = r^2$.

(8) Udowodnić twierdzenie:
   Jeśli $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ jest homeomorfizmem, to metryka
$$\rho'(y_1, y_2) = \rho_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$$
   w Y jest równoważna metryce ρ_Y i $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho')$ jest izometrią.