Topologia metryczna, Lista 5

(1) Sprawdzić ciągłość iloczynu skalarnego punktów w $\mathbb{R}^n$ traktowanego jako odwzorowanie $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(2) Udowodnić wzory dla $A \subset (X, \rho_X)$ i $B \subset (Y, \rho_Y)$:
  (a) $\operatorname{cl}(A \times B) = \operatorname{cl} A \times \operatorname{cl} B$
  (b) $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$
(w $X \times Y$ rozpatrujemy jakąkolwiek metrykę zbieżności po współrzędnych). Wywnioskować stąd, że produkt kartezjański dwóch zbiorów domkniętych (otwartych) $A \subset X$ i $B \subset Y$ jest domknięty (otwarty) w $X \times Y$.

(3) Wykazać, że jeśli $f, g : X \to Y$ są ciągłe, to zbiór $\{\,(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = g(x_2)\,\}$ jest domknięty w $X \times X$ z metryką zbieżności po współrzędnych .

(4) Sprawdzić zupełność następujących przestrzeni:
  (a) płaszczyzny w metrykach ρ_m, ρ_s, "rzeka" i "centrum"
  (b) dowolnej przestrzeni z metryką dyskretną ρ_{01}.

(5) Czy homeomorfizm między przestrzeniami metrycznymi zupełnymi musi przekształcać ciągi Cauchy'ego na ciągi Cauchy'ego?
Sprawdzić, czy jeśli $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem Lipschitza i ciąg $(x_n) \subset X$ jest Cauchy'ego, to $(f(x_n))$ jest Cauchy'ego w Y.

(6) Niech $X = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\right\}$ z metryką euklidesową, a $f : X \to \mathbb{N}$ będzie określone wzorem $f(\frac{1}{n}) = n$. Sprawdzić, czy f jest homeomorfizmem i czy f przeprowadza ciągi Cauchy'ego w X na ciągi Cauchy'ego w $\mathbb{N}$. Czy przestrzenie X i $\mathbb{N}$ są zupełne?