Topologia metryczna, Lista 6

(1) Dla przestrzeni metrycznych (X, ρ_X) i (Y, ρ_Y) rozważamy przestrzeń $B(X, Y)$ odwzorowań ograniczonych z (X, ρ_X) w (Y, ρ_Y) z metryką ρ_{sup} oraz podprzestrzeń $C(X, Y) \subset B(X, Y)$ odwzorowań ciągłych ograniczonych. Pokazać, że $C(X, Y)$ jest podzbiorem domkniętym w $B(X, Y)$. Inaczej mówiąc, granica jednostajna ciągu odwzorowań ciągłych ograniczonych jest odwzorowaniem ciągłym.

Wywnioskować stąd i z odpowiednich faktów z wykładu, że jeśli (Y, ρ_Y) jest zupełna, to $C(X, Y)$ też jest zupełna.

(*) Udowodnić, że jeśli przestrzeń metryczna (X, ρ_X) jest ograniczona, to odwzorowanie $T : X \to C(X, \mathbb{R})$, $T(x) = f_x$, gdzie $f_x : X \to \mathbb{R}$ jest określone jako $f_x(z) = \rho(z, x)$, jest izometrią na swój obraz (w $\mathbb{R}$ rozpatrujemy zwykłą metrykę euklidesową).

(2) Pokazać, że jeśli odwzorowanie $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ jest izometrią i przestrzeń (X, ρ_X) jest zupełna, to (Y, ρ_Y) jest też zupełna. Podać przykład, że jeśli f jest tylko homeomorfizmem, to taka implikacja nie musi zachodzić.

(3) Przestrzeń (X, ρ_X) nazywamy *metryzowalną w sposób zupełny*, gdy w X istnieje metryka zupełna równoważna metryce ρ_X.

Uzasadnić, że jeśli przestrzeń metryczna (X, ρ_X) jest homeomorficzna z przestrzenią zupełną, to jest metryzowalna w sposób zupełny (zob. Lista 4, zadanie 8).

(4) Czy dowolny przedział otwarty na prostej euklidesowej jest metryzowalny w sposób zupełny? Jeśli tak, to podać wzór na równoważną metrykę zupełną w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$.

(5) Czy zbiór $X = \{1/n : n = 1, 2, \dots\}$ ze zwykłą metryką euklidesową jest metryzowalny w sposób zupełny?