

## Topologia metryczna, Lista 7

- (1) Zbadać zwartość
  - (a) domknięć kul na płaszczyźnie z metryką "rzeka" i "centrum"
  - (b) kwadratu  $I \times I$  z metrykami  $\rho_c, \rho_r, \rho_m, \rho_{01}$  ( $I = [0, 1]$ )
  - (c) przestrzeni funkcyjnej  $C(I, I)$  z metryką  $\rho_{\text{sup}}$ .
- (2) Uzasadnić, że jeśli przestrzeń metryczna  $(X, \rho)$  jest zwarta, to metryka  $\rho$  jest zupełna.
- (3) Rodzina podzbiorów otwartych przestrzeni  $X$ , których suma równa się  $X$ , nazywa się *pokryciem otwartym* przestrzeni  $X$ .  
Dla przestrzeni niezwartych występujących w zadaniu 1, wskazać
  - (a) pokrycia otwarte, z których nie da się wybrać pokryć skończonych;
  - (b) niepuste podzbiory domknięte  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ , dla których  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ .
- (4) Pokazać, że jeśli zbiór  $A \subset (X, \rho)$  jest niepusty i podprzestrzeń  $(A, \rho)$  jest zwarta, to dla każdego  $x \in X$  istnieje punkt  $a_0 \in A$  taki, że  $\rho_A(x) = \rho(a_0, x)$ , gdzie  $\rho_A(x) = \inf\{\rho(a, x) : a \in A\}$  (czyli odległość punktu od zbioru  $A$  jest realizowana).
- (5) Pokazać, że przestrzeń metryczna  $(X, \rho)$  jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda funkcja ciągła  $f : (X, \rho) \rightarrow (\mathbb{R}, \rho_e)$  jest ograniczona.