Topologia metryczna, Lista 8

(1) Wykazać, że "trójkowy" zbiór Cantora $C \subset [0,1]$ jest podobny do swych podzbiorów $C \cap [0, \frac{1}{3}]$, $C \cap [\frac{2}{3}, 1]$, $C \cap [0, \frac{1}{9}]$, $C \cap [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, itd.

(2) Niech $X = \{0,1\}^\infty := \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots$ z metryką

$$\rho\left((s_1, s_2, \ldots), (t_1, t_2, \ldots)\right) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{n : s_n \neq t_n\}}, & \text{gdy } (s_1, s_2, \ldots) \neq (t_1, t_2, \ldots); \\ 0, & \text{gdy } (s_1, s_2, \ldots) = (t_1, t_2, \ldots). \end{cases}$$

Sprawdzić, że ρ jest metryką w X, w której zachodzi zbieżność po współrzędnych.

Wykazać, że odwzorowanie $f : C \to X$ określone wzorem

$$f\left(\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots\right) = \left(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}, \ldots\right) \quad \text{gdzie } c_n \in \{0,2\} \text{ dla każdego } n$$

jest homeomorfizmem.

(3) Pokazać, że produkt kartezjański $C \times C$ jest homeomorficzny z C.
Wskazówka: skorzystać z poprzedniego zadania lub zajrzeć do Skryptu.

(4) Korzystając z poprzedniego zadania i wykorzystując funkcję "schodkową" $s : C \to [0,1]$, określić odwzorowanie ciągłe ze zbioru Cantora C na kwadrat euklidesowy $[0,1]^2 := [0,1] \times [0,1]$.

(5) Czy istnieją odwzorowania ciągłe z:
(a) C na C^3,
(b) C na $\mathbb{Q}$,
(c) $\mathbb{Q}$ na C,
(d) C na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
(e) C na sześcian euklidesowy $[0,1]^3$,
(f) C na $\mathbb{R}^2$,
(g) C na okrąg $S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : ||\mathbf{x}|| = 1\}$,
(h) C na sferę $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : ||\mathbf{x}|| = 1\}$,
(i) C na $C \times [0,1]$,
(j) C na $X := \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$,
(k) C na $X \times [0,1]$, ?

Podaj odwzorowania (wykorzystując m.in. funkcję z C na $[0,1]$) lub przyczynę ich braku (np. zwartość).

(6) Zbiór W_1 tworzymy z przedziału $W_0 = [0,1]$, dzieląc W_0 na 5 przystających przedziałów i wybierając pierwszy, trzeci i piąty. Zbiór W_{n+1} tworzymy z W_n, postępując tak samo z każdym maksymalnym przedziałem w zbiorze W_n (zatem W_n jest sumą 3^n rozłącznych przedziałów domkniętych o długości $\frac{1}{5^n}$). Zbiór $C_{5,3} = \bigcap_{n=0}^\infty W_n$, z metryką euklidesową nazwiemy "piątkowym" zbiorem Cantora.

Podaj analityczną postać liczb należących do $C_{5,3}$.