Topologia metryczna, Lista 9

(1) Sprawdzić spójność przestrzeni
  (a) $\mathbb{R}^2$ z metrykami ρ_c i ρ_r.
  (b) $X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{(0,0)\}$ z metryką euklidesową.

(2) Wiemy z wykładu, że wszystkie możliwe przedziały (z 2 końcami, z 1 końcem, bez końców, ograniczone lub nie) na prostej euklidesowej są spójne. Pokazać, że nie ma innych niejednopunktowych spójnych podprzestrzeni przestrzeni $(\mathbb{R}, \rho_e)$.

(3) Udowodnić, że produkt kartezjański dwóch przestrzeni spójnych jest spójny. Wskazówka: pokazać, że każde dwa punkty w produkcie można połączyć podprzestrzenią spójną.

(4) Czy istnieją odwzorowania ciągłe z:
  (a) przedziału euklidesowego [0,1] na zbiór Cantora C?
  (b) $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Q}$?,
  (c) $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

(5) Mówimy, że zbiór $A \subset X$ *rozspaja* spójną przestrzeń X, gdy $X \setminus A$ jest podprzestrzenią niespójną.
  (a) Niech $h : X \to Y$ będzie homeomorfizmem. Pokazać, że jeśli A rozspaja przestrzeń spójną X, to $h(A)$ rozspaja Y.
  (b) Sprawdzić, czy i które podzbiory jedno i dwupunktowe rozspajają: przedział domknięty, przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^n$, kwadrat, okrąg. Wykorzystać to do pokazania, że wymienione przestrzenie nie są homeomorficzne.
  (c) Niech, dla $n \geqslant 2$, $X(n)$ będzie n-odem, tzn. podzbiorem płaszczyzny euklidesowej, będącym sumą n odcinków mających wspólny koniec i wzajemnie rozłącznych poza tym końcem. Zidentyfikować podzbiory n elementowe w $X(n)$ nie rozspajające $X(n)$ i pokazać, że dla $m \neq n$ przestrzenie $X(m)$ i $X(n)$ nie są homeomorficzne.