Lista z ZMP

Elementy teorii liczb

Definicja 1 (Funkcja Eulera) *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jeśli $n > 0$, to*

$$\varphi(n) = |\{x \in \{1, \dots, n\} : \ nwd(x, n) = 1\}|.$$

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Eulera) *Niech $a \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, jeżeli $nwd(a, n) = 1$, to*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

Twierdzenie 2 (Małe twierdzenie Fermata) *Jeżeli $1 \leq a < p$ i p jest liczbą pierwszą, to*

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

Twierdzenie 3 (Chińskie twierdzenie o resztach) *Jeżeli $\{n_1, \dots, n_m\}$ jest zbiorem dodatnich liczb naturalnych parami względnie pierwszych, $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathbb{Z}$, to istnieje $x \in \mathbb{Z}$ takie, że*

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \ \ a_i \equiv x \mod n_i.$$

Ponadto, jesli x, y są dwoma rozwiazaniami powyższego układu kongruencjii, to

$$y \equiv x \mod n_1 \cdot \ldots \cdot n_m.$$

Zadanie 1 *Nie korzystając z twierdzenia o multiplikatywności funkcji Eulera φ, proszę udowodnić że, jeśli p, q są dwiema różnymi liczbami pierwszymi, to $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$.*

Zadanie 2 *Niech będą dane dwie niezerowe liczby całkowite $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Proszę udowodnić*

$$nwd(m, n) = \min\{x \cdot m + y \cdot n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \ \ x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Wywnioskować stąd, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ równanie $m \cdot m + y \cdot n = nwd(m, n)$ ma niepuste rozwiązanie w liczbach całkowitych.

Zadanie 3 *Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, proszę znaleźć rozwiązanie następującego równania diofantycznego (w liczbach całkowitych)*

$$128 \cdot x + 89 \cdot y = 15.$$

Zadanie 4 *Proszę znaleźć wszystkie rozwiązania, następującego równania diofantycznego*

$$2012 \cdot x + 1999 \cdot y = 1000.$$

Zadanie 5 *Proszę rozwiązać następujące równanie diofantyczne*

$$2 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z = 7.$$

Zadanie 6 *Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ będzie dodatnią liczbą naturalną oraz $f \in \mathbb{Z}[x]$ wielomianem jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych. Proszę udowodnić*

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z}) \ (a \equiv b \mod n \longrightarrow f(a) \equiv f(b) \mod n).$$

Zadanie 7 *Niech będzie dana liczba* $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots a_m 10^m$*, gdzie* $a_k \in \mathbb{Z}_{10} \wedge k \in \mathbb{Z}_{m+1}$ *będzie liczbą naturalną zapisana w układzie dziesiętnym. Proszę udowodnić, że* n *jest podzielna przez* 9 *wtedy i tylko wtedy gdy suma cyfr* $a_0 + \dots + a_m \equiv 0 \mod 9$*. Jaka jest cecha podzielności liczby naturalnej przez liczbę* 3*?*

Zadanie 8 *Proszę udowodnić, że każda liczba zapisana w układzie* 10*-tnym jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy gdy* $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^m a_m \equiv 0 \mod 11$*. Dla jakich* $n \in \mathbb{N}$*, liczba* $10^n + 1$ *jest podzielna przez* 11*?*

Zadanie 9 *Proszę wyznaczyć przedostatnią cyfrę liczby* $3^{2012} + 11^{2011}$*, zapisanej w układzie dziesiętnym.*

Zadanie 10 *Proszę wyznaczyć. wszystkie rozwiązania układu równań diofantycznych:*

$$\begin{cases} x \equiv & 12 \mod 5 \\ x \equiv & 33 \mod 7 \\ x \equiv & 76 \mod 9 \\ x \equiv & 22 \mod 13. \end{cases}$$

Zadanie 11 * *Niech* m, n *będą dwiema dotanimi liczbami względnie pierwszymi. Definiujemy relację następująco:*

$$\forall x \in \{1, \dots, m{\cdot}n\} \forall (i,j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}\ (x, (i,j)) \in f \longleftrightarrow x \equiv i \mod m \wedge x \equiv j \mod n.$$

Stosując (w niektórych podpunktach poniżej) chińskie twierdzenie o resztach udowodnij, że

1. f *jest funkcją,*
2. $f : \{1, \dots, m \cdot n\} \to \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ *jest bijekcją,*
3. *dla* $x \in dom(f)$ *i* $f(x) = (i_x, j_x)$*,* $nwd(x, m \cdot n) = 1 \longleftrightarrow nwd(i_x, m) = 1 \wedge nwd(j_x, n) = 1$*,*
4. $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$*.*

Robert Rałowski