Studium Talent. Lista nr 1.

Zadanie 1 *Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*
Wsk.
1 Wystarczy pokazać, że dla każdej liczby $n \in N$ *istnieje większa od niej liczba pierwsza.*
2. $n! + 1$ *nie jest podzielna przez żadną liczbę (>1) mniejszą od* $n + 1$ *(Dlaczego?) i posiada rozkład na czynniki pierwsze.*

Zadanie 2 *Pokazać, że jeśli* p *jest liczbą pierwszą, to nie istnieje liczba wymierna* x *taka, że* $x^2 = p$.
Czyli $\sqrt{p}$ *nie jest liczbą wymierną.*

Zadanie 3 *Pokazać, że* $\sqrt{6}$ *nie jest liczbą wymierną.*

Zadanie 4 *Pokazać, że jeśli liczba naturalna* m *jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych, to* $\sqrt{m}$ *nie jest liczbą wymierną (tzn. nie istnieje liczba wymierna* x *taka, że* $x^2 = m$*).*

Zadanie 5 *Pokazać, że nie istnieje liczba wymierna* x *taka, że* $x^3 = 2$.
Czyli $\sqrt[3]{2}$ *nie jest liczbą wymierną.*

Zadanie 6 *Pokazać, że jeśli* p *jest liczbą pierwszą, to nie istnieje liczba wymierna* x *taka, że* $x^3 = p$.
Czyli $\sqrt[3]{p}$ *nie jest liczbą wymierną.*

Zadanie 7 *Korzystając z faktu, że dla danej liczby rzeczywistej istnieje zawsze większa od niej liczba naturalna udowodnić, że w każdym przedziale* $(0, a)$*, gdzie* $a > 0$ *istnieje liczba postaci* $\frac{1}{n}$*, gdzie* n *jest liczbą naturalną.*

Zadanie 8 *Pokazać, że między dwiema (różnymi) liczbami wymiernymi istnieje zawsze liczba niewymierna.*

Wsk. Poprzednie zadanie i zauważenie, że np. $\frac{\sqrt{2}}{n}$ jest l. niewymierną.

Zadanie 9 *Pokazać, że między dwiema (różnymi) liczbami niewymiernymi istnieje zawsze liczba wymierna.*

Zadanie 10 *Rozważmy następujące zdania:*
p: "Jaś zaliczył analizę matematyczną";
q: "Jaś zaliczył fizykę';
r: "Jaś zaliczył informatykę";
Wiadomo, że zdanie:
"Jeśli Jaś zaliczył analizę matematyczną i nie zaliczył fizyki, to nie zaliczył informatyki"
jest fałszywe.
Jakie przedmioty na pewno zaliczył Jaś ?

Zadanie 11 *Udowodnij poniższe prawa logiki:*
1. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$;
2. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$;
3. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
4. $[(\neg p) \Rightarrow p] \Rightarrow p$;
5.$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$;
6. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$;
7. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$;
8. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$;
9. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$;
10. $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$;

Zadanie 12 *Które z poniższych są prawami logiki?*
a) $p \Rightarrow (p \vee q)$; *b)* $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$;
c) $[p \vee (\neg q)] \Rightarrow (p \wedge q)$; *d)* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [q \Rightarrow p]$.

Zadanie 13 *Zapisać poniższe zdania przy pomocy symboli matematycznych (m.in. kwantyfikatorów):*
1. Każda liczba rzeczywista jest większa od 5;
2. Równanie $\sqrt{x} = -\pi$ *ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych;*
3. Zbiór liczb naturalnych jest ograniczony z góry;
4. Zbiór $A \subset R$ *posiada największy element;*
5. Liczba M *ogranicza z góry zbiór* $B \subset R$ *i nie jest to najmniejsze ograniczenie z góry zbioru* B*;*
6. Każda liczba naturalna jest parzysta;
7. Równanie $x^2 + x - 71 = 0$ *nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.*

Zadanie 14 *Które z poniższych zdań są prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź.*
a) $\bigvee_{x \in R} x^2 - x > \frac{1}{2}$;
b) $\bigwedge_{x \in R} x^2 + 4x + 3 > 0$;
c) $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 - y^2 = 0$;
d) $\bigvee_{y \in R} \bigwedge_{x \in R} x^2 - y^2 = 0$;
e) $\bigvee_{y \in R} \bigwedge_{x \in R} xy = 0$;
f) $\bigvee_{x \in R} \bigwedge_{n \in N} \bigvee_{m \in N} \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = x$.

Zadanie 15 *Udowodnij (zwróć uwagę na używane prawa logiki):*
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
c) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Zadanie 16 *Przy pomocy indukcji matematycznej udowodnij:*
a) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
b) $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$;
c) $(1 + \frac{1}{1})^1 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 \cdot ... \cdot (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{(n+1)^n}{n!}$;
d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$;
e) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ *for* $x \geq -1$ *and* $n \in N$;
f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2n-1}{n}$;
g) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$;
h) 3 *dzieli* $4^n - 1$;
i) 5 *dzieli* $n^5 - n$;
j) Zbiór n-elementowy ma dokładnie 2^n *różnych podzbiorów.*

Zadanie 17 *Znaleźć wszystkie liczby naturalne* n, *dla których prawdziwa jest dana nierówność.*
a) $2^n > n^2$;
b) $2^n < n!$;
c) $n! < (\frac{n}{2})^n$;
d) $(2n)! > n^n$;
e) $2^n < 2n^2$.
Udowodnij postawioną tezę.

Zadanie 18 *Pokazać, że dla każdej pary* $n, k \in N$, *gdzie* $1 \leq k \leq n$ *zachodzi równosć:*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Zadanie 19 *Jaki jest współczynnik :*
a) przy x^{15} *w rozwinięciu* $(x + x^2)^{10}$;
b) przy x^{-2} *w rozwinięciu* $(2x^5 - \frac{1}{x^2})^8$;
c) przy a^5 *w rozwinięciu* $(a^3 + \frac{1}{a^2})^{15}$.