

## Studium Talent. Lista nr 2.

**Zadanie 20** Znaleźć dziedzinę, przeciwdziedzinę oraz zbiory wartości danych funkcji:

a)  $f(x) = \log(x^2 - 1)$ ;   b)  $g(x) = 1 + 2\sqrt[4]{\sin x}$ ;   c)  $h(x) = 2^{-|x|}$ .

**Zadanie 21** Czy funkcje  $f$  i  $g$  są równe? Dlaczego?

a)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = \sqrt{x^2}$ ;   b)  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ;  
c)  $f(x) = 1 - x$ ,  $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x}$ ;   d)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \log_3 3^x$ .

**Zadanie 22** Które z podanych funkcji są "na"? Dlaczego?

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^2$ ;   b)  $g : [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1]$ ,  $g(x) = \sin x$ ;  
c)  $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $h(x) = 2^x$ ;   d)  $k : (0, \infty) \rightarrow [2, \infty)$ ,  $k(x) = x + \frac{1}{x}$ .

**Zadanie 23** Które z podanych funkcji są różnowartościowe? Dlaczego?

a)  $f(x) = x^3 + 1$ ;   b)  $g : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ;  
c)  $h(x) = x^3 |x|$ ;   d)  $k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k(x) = 1 + \sqrt{x}$ .

**Zadanie 24** Czy istnieje funkcja różnowartościowa odwzorowująca dany zbiór  $X$  na dany zbiór  $Y$ ? Dlaczego?

a)  $X = (0, 1)$ ,  $Y = (0, 2)$ ;   b)  $X = (1, 3)$ ,  $Y = (-1, 4)$ ;  
c)  $X = (0, 1)$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ;   d)  $X = (0, 1)$ ,  $Y = (1, \infty)$ ;  
e)  $X = (1, 3)$ ,  $Y = (-\infty, 2)$ ;   f)  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = [0, \infty)$ .

**Zadanie 25** Pokazać, że jeśli zbiór  $X$  jest nieskończony (tzn. nie jest równoliczny z żadnym zbiorem skończonym), to zawiera on podzbiór równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

**Zadanie 26** Pokazać, że jeśli zbiór  $X$  jest nieskończony  $a \in X$ , to zbiory  $X$  oraz  $X - \{a\}$  są równoliczne. Uogólnić (i udowodnić), że fakt ten jest prawdziwy, gdy  $\{a\}$  zastąpimy dowolnym skończonym podzbiorem zbioru  $X$ .

**Zadanie 27** Zbiorami przeliczalnymi nazywamy zbiory skończone lub równoliczne ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

Pokazać, że podane zbiory są przeliczalne:

- a) Zbiór wszystkich liczb podzielnych przez 3 ;
- b) Podzbiór zbioru przeliczalnego;
- c) Suma dwóch zbiorów przeliczalnych;
- d) Suma skończonej ilości zbiorów przeliczalnych;
- e) Pierwiastki wszystkich trójmianów kw. o współczynnikach naturalnych;
- e) Pierwiastki wszystkich trójmianów kw. o współczynnikach całkowitych;
- e) Pierwiastki wszystkich trójmianów kw. o współczynnikach wymiernych;
- f) Pierwiastki wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych.

**Zadanie 28** Pokazać, że zbiór liczb niewymiernych nie jest przeliczalny.  
Wsk. Zad.27 c) i zad.24 c).