**Przykładowe rozwiązania**
**Uwaga: Proszę o zgłaszanie ewentualnych błędów drukarskich w poniższym tekście.**

Grupa A

**Z. 1** ***Sformułować*** *zasadę indukcji matematycznej i następnie* ***pokazać****, że każda liczba postaci $n^3 - n$, gdzie $n \in N$, jest podzielna przez 6.*

Sformułowanie zasady indukcji było wielokrotnie podane na wykładzie.
Uwaga: Zasada indukcji jest twierdzeniem!
I sposób:
$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ i wystarczy zauważyć, że jest to iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych lub zero, a więc musi być podzielny zarówno przez 2 jak i 3, czyli również przez 6.
II sposób (indukcja):
a) dla $n = 1$ jest oczywiste $(6|0)$;
b) gdyby $6|(n^3 - n)$, to
$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n+1)$ i byłaby to suma liczby podzielnej przez 6 oraz liczby podzielnej przez 3 i 2 (bo $n(n+1)$ jest zawsze parzysta), a więc podzielna przez 6.
Zasada indukcji kończy dowód.

**Z. 2** ***Podać*** *(bez użycia funkcji cyklometrycznych) argument główny liczby*

$$z = \frac{(1-i)^7}{(-1+i\sqrt{3})^5}.$$

Wystarczy znaleźć postać trygonometryczną liczby $z$:
$1 - i = \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})]$ oraz $-1 + i\sqrt{3} = 2[\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})]$.
Stąd:
$\frac{(1-i)^7}{(-1+i\sqrt{3})^5} = \frac{(\sqrt{2})^7[\cos(-\frac{7\pi}{4})+i\sin(-\frac{7\pi}{4})]}{2^5[\cos(\frac{10\pi}{3})+i\sin(\frac{10\pi}{3})]} = \frac{(\sqrt{2})^7}{2^5}[\cos(-\frac{7\pi}{4} - \frac{10\pi}{3}) + i\sin(-\frac{7\pi}{4} - \frac{10\pi}{3})]$.
Ponadto
$-\frac{7\pi}{4} - \frac{10\pi}{3} = -\frac{61}{12}\pi = -6\pi + \frac{11}{12}\pi$. Odp. $\arg z = \frac{11}{12}\pi$.

**Z. 3** ***Podać*** *definicję funkcji $arctgx$, a następnie* ***znaleźć*** *dziedzinę funkcji $f(x) = arccos[arctg(x^2 - 1)]$.*

Najprościej $arctgx$ można zdefiniować jako funkcję odwrotną do funkcji $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to R$ danej wzorem $f(x) = tgx$
(lub równoważnie $arctg : R \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i dla $x \in R$ wartość $arctgx$ jest jedyną liczbą $t$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ taką, że $tgt = x$).

Ponieważ $arctgx$ oraz $x^2 - 1$ są określone dla dowolnych $x \in R$, więc jedynym warunkiem jest by argument funkcji $\arccos x$ był w przedziale $[-1; 1]$.
Ponieważ $tg(arctgt) = t$ i $tgx$ jest funkcją rosnącą na $[-1; 1]$, więc:
$-1 \leq arctg(x^2 - 1) \leq 1 \Leftrightarrow tg(-1) \leq x^2 - 1 \leq tg(1) \Leftrightarrow 1 + tg(-1) \leq x^2 \leq 1 + tg(1) \Leftrightarrow 1 - tg(1) \leq x^2 \leq 1 + tg(1)$.
Ponieważ $tg(x) > x$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ (lub $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$, stąd $1 = tg(\frac{\pi}{4}) < tg(1)$), więc $1 - tg(1) < 0$, a stąd wynika, że $x \in [-\sqrt{1 + tg(1)}; \sqrt{1 + tg(1)}]$.

**Z. 4** ***Wskazać*** *funkcję różnowartościową odwzorowującą przedział otwarty* $A = (3, 4)$ *na półprostą* $B = (3, \infty)$.
***Czy istnieje*** *istnieje taka funkcja, gdy* $A = (3, 4]$ *?*

Niech np.: $f : (3; 4) \to (3; \infty)$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{3}{x-3}$. Wówczas $f$ jest różnowartościowa i "na".
Ponieważ zbiory $(3; 4)$ oraz $(3; 4]$ są równoliczne (jako zbiory nieskończone różniące się jednym punktem), więc taka funkcja istnieje.
Przykładowo (to nie było konieczne) taką funkcje można określić następująco przy pomocy powyżej określonej funkcji $f$:
Niech $B = \{x \in (3; 4) : x = 4 - \frac{1}{n}, n = 2, 3, 4, ...\}$.
Określamy $g : (3; 4] \to (3; \infty)$ następująco:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \ gdy \ x \in (3; 4) - B \\ f(4 - \frac{1}{n+1}) \quad gdy \ x = 4 - \frac{1}{n} \in B \\ f(\frac{7}{2}) \quad gdy \ x = 4. \end{cases}$$

Nietrudno pokazać, że $g$ jest 1-1 i "na" (ćw.)

**Z. 5** ***Pokazać,*** *że* $\sqrt[3]{9}$ *jest liczbą niewymierną.*

Dowód nie wprost:
Gdyby $\sqrt[3]{9}$ był liczbą wymierną, to istniałby ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in N$ taki, że $(\frac{p}{q})^3 = 9$. Wówczas $p^3 = 9q^3$, a więc $3|p^3$. Ponieważ 3 jest liczbą pierwszą, więc $3|p$, a zatem $p = 3k$ dla pewnego $k \in N$. Stąd $(3k)^3 = 9q^3$, a więc $3k^3 = q^3$ i $q^3$ jest podzielne przez 3, a zatem $q$ też jest podzielne przez 3. Ponieważ $p, q$ nie mają wspólnych podzielników, więc nie jest możliwe by obie te liczby były podzielne przez 3, co daje sprzeczność. Zatem $\sqrt[3]{9}$ nie jest liczbą wymierną.
Innym akceptowalnym rozwiązaniem było skorzystanie z tw. o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitychh $(x^3 - 9)$ i zauważenie, że żadna z liczb (jedynych możliwych pierwiastków wymiernych tego wielomianu) $-1, 1, -3, 3, -9, 9$ nie jest pierwiastkiem tego wielomianu.
Zatem $\sqrt[3]{9}$, jako pierwiastek tego wielomianu, musi być liczbą niewymierną.

Grupa B

**Z. 1** ***Wskazać*** *funkcję różnowartościową odwzorowującą prostą* $R = (-\infty, \infty)$ *na przedział otwarty* $B = (-1, 5)$ *?*
***Czy istnieje*** *taka funkcja, gdy* $B = [-1, 5)$ *?*

Niech np. $f : R \to (-1; 5)$ będzie dana wzorem $f(x) = 2 + \frac{6}{\pi} arctg(x)$. Wówczas $f$ jest różnowartościowa i "na".
Ponieważ zbiory $(-1; 5)$ oraz $[-1; 5)$ są równoliczne (jako zbiory nieskończone różniące się jednym punktem), więc taka funkcja istnieje.
Przykładowo (to nie było konieczne) taką funkcje można określić następująco przy pomocy powyżej określonej funkcji $f$:
Niech $B = \{x \in [-1; 5) : x = -1 + \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, 4, ...\}$.
Określamy $g : [-1; 5) \to R$ następująco:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \ gdy \ x \in (-1; 5) - B \\ f(-1 + \frac{1}{n+1}) \quad gdy \ x = -1 + \frac{1}{n} \in B \\ f(0) \quad gdy \ x = -1. \end{cases}$$

Nietrudno pokazać, że $g$ jest 1-1 i "na" (ćw.)

**Z. 2** ***Podać*** *definicję funkcji* $\arccos x$, *a następnie bez użycia funkcji trygonometrycznych i cyklometrycznych* ***podać wartość*** *liczby* $\arccos(\cos(5))$.

Najprościej $\arccos x$ można zdefiniować jako funkcję odwrotną do funkcji $f : [0; \pi] \to [-1, 1]$ danej wzorem $f(x) = \cos x$
(lub równoważnie $\arccos : [-1, 1] \to [0; \pi]$ i dla $x \in [-1, 1]$ wartość $\arccos x$ jest jedyną liczbą $t$ w przedziale $[0; \pi]$ taką, że $\cos t = x$).
Niech (dla uproszczenia zapisu) $t = \cos 5$. $\alpha = \arccos t$ to (jedyna) liczba z przedziału $[0, \pi]$ taka, że $\cos \alpha = t$, czyli $\cos \alpha = \cos 5$. Ponieważ $\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$, więc $\alpha = 2\pi - 5 \in [0; \pi]$ oraz $\cos \alpha = \cos(2\pi - 5) = \cos(-5) = \cos 5$.
Odp.: $\arccos(\cos(5)) = 2\pi - 5$.
Uwaga: Tak naprawdę korzystaliśmy z tw. o tym, kiedy $\cos \alpha = \cos \beta$ ($\alpha = \beta + 2k\pi$ lub $\alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi$, $k \in Z$) albo po prostu ze szkicu wykresu funkcji $cosx$.

**Z. 3** ***Rozwiązać*** *równanie* $z^3 = \frac{8}{(-1+i)^9}$.
*Rozwiązania podać w postaci algebraicznej.*

Przypomnijmy, że równanie $z^n = w$ (gdzie $w \in C$ jest daną liczbą) dla $n > 2$ potrafimy rozwiązać, gdy
a) znamy postać trygonometryczną liczby $w$ lub

b) gdy znamy jedno z rozwiązań tego równania.
Równanie to ma zawsze $n$ rozwiązań dla $w \neq 0$.
Można zatem albo znaleźć postać trygonometryczną liczby $\frac{8}{(-1+i)^9}$ i skorzystać z tw. a)
(zostawię jako ćwiczenie. Wsk. Tw. o mnożeniu i dzieleniu liczb w postaci trygonometrycznej)
albo zauważyć b), że
$z_1 = \frac{2}{(-1+i)^3}$ jest jednym z rozwiązań (przez proste sprawdzenie).
Zatem pozostałe rozwiązania są obrotami o kąt $\frac{2\pi}{3}$, czyli
$z_2 = z_1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ oraz
$z_3 = z_2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ są pozostałymi rozwiązaniami. Obliczenie postaci algebraicznej tych liczb zostawię jako ćwiczenie.
Uwagi:
(i) Obliczenia stają się prostsze w obu sposobach a) i b) jeśli zauważymy, że $\frac{8}{(-1+i)^9} = \frac{2^3(-1-i)^9}{2^9}$ (postać algebraiczna ilorazu) oraz
$(-1-i)^3 = (\sqrt{2})^3[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})]$.
(ii) Szukanie rozwiązania w postaci $z = x+iy$ dla $n > 2$ jest z reguły skazane na niepowodzenie i była o tym mowa na wykładzie.

**Z. 4** ***Sformułować*** *tw. o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze i korzystając z niego pokazać, że jeśli liczba pierwsza $p$ dzieli iloczyn $mk$, gdzie $k, m \in N$, to $p$ dzieli $m$ lub $p$ dzieli $k$.*
*Pokazać, że fakt ten nie jest prawdziwy, gdy $p$ nie jest liczbą pierwszą.*

Było na wykładzie.
**Uwaga:** Brak w sformułowaniu twierdzenia informacji o jednoznaczności rozkładu (z dokładnością do kolejności czynników) nie pozwala na udowodnienie powyższego faktu!
Przykład: $4|2\cdot 6$, ale 4 nie dzieli ani 2 ani 6 (4 nie jest liczbą pierwszą).

**Z. 5** ***Czy*** *zbiór $C = \{\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} :\ n \in N\} \subset R$ jest ograniczony?*
***Dlaczego****?*

Tak, bo
$0 \leq \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} \leq 2n\frac{1}{n+1} \leq 2$, gdyż suma ma $2n$ składników i pierwszy z nich, $\frac{1}{n+1}$, jest największy.
Uwaga: Wszystkie elementy zbioru $C$ leżą w przedziale $[\frac{2}{3}; 2]$, bo również $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} \geq 2n\frac{1}{n+2n} = \frac{2}{3}$ (suma ma $2n$ składników i ostatni $\frac{1}{n+2n}$ jest najmniejszy).

Po egzaminie pojawiło się pytanie o rozwiązanie zad. 17c) z listy zadań. Zadanie to było jednym z trudniejszych (i oczywiście nic o takim stopniu trudności nie pojawiło się na egzaminie).
Prawdziwość implikacji
$[n^! < (\frac{n}{2})^n] \Rightarrow [(n+1)^! < (\frac{n+1}{2})^{n+1}]$ (czyli tzw. krok indukcyjny)
można pokazać korzystając faktu, że
$(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$ dla $n \in N$ (czyli $(n+1)^n \geq 2n^n$ ) w następujący sposób:
Gdyby $n^! < (\frac{n}{2})^n$, to mnożąc obustronnie przez $n+1$ otrzymalibyśmy
$(n+1)^! < (\frac{n}{2})^n(n+1) = \frac{2n^n}{2^{n+1}}(n+1) \leq \frac{(n+1)^n}{2^{n+1}}(n+1) = (\frac{n+1}{2})^{n+1}$,
co kończy krok indukcyjny.
Uwagi:
(i) Niestety nie zdążyliśmy pokazać na wykładzie (niezbyt oczywistej) nierówności $(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$ dla $n \in N$, co skutkowało trudnością w rozwiązywaniu tego zadania.
(ii) Wspomniana wyżej nierówność jest wnioskiem z ogólniejszego (i też nieoczywistego) faktu, że liczby postaci $(1+\frac{1}{n})^n$ tworzą ciąg rosnący, co dowodzi się badając iloraz dwóch kolejnych liczb tej postaci.
(iii) Liczbami postaci $(1+\frac{1}{n})^n$ zajmowaliśmy się przy innej okazji pokazując, że tworzą one zbiór ograniczony z góry.

Dziękuję za wspólnie spędzone chwile i mam nadzieję, że czas ten nie był zmarnowany.