

Studium Talent. Lista nr 4.

Zadanie 39 Korzystając jedynie z definicji mnożenia liczb zespolonych wykazać, że $(zw)u = z(wu)$ dla dowolnych $z, w, u \in C$.

Zadanie 40 Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające podane równania:

a) $x(2 + 3i) + y(5 - 2i) = -8 + 7i$; b) $(2 + iy)(x - 3i) = 7 - i$;
c) $\frac{1+iy}{x-2i} = 3i - 1$; d) $\frac{x+iy}{x-iy} = \frac{9-2i}{9+2i}$.

Zadanie 41 W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

a) $z^2 + 3\bar{z} = 0$; b) $2z + (1 + i)\bar{z} = 1 - 3i$;
c) $z^2 - 4z + 13 = 0$; d) $(z + 2)^2 = (\bar{z} + 2)^2$.

Wsk. a), b), d) Rozważyć $z = x + iy$.

Zadanie 42 Na płaszczyźnie zespolonej naszkicować zbiory tych liczb z , które spełniają podane warunki:

a) $Re(iz + 2) \geq 0$; b) $Imz^2 < 0$;
c) $\frac{4}{z} = \bar{z}$; d) $Im\frac{1+iz}{1-iz} = 1$;
e) $|(2 + i)z - 3 + 4i| = 1$; f) $|z - 2i| = |z + 1|$.

Wsk. $|z - w|$ jest odległością liczby z od w .

Zadanie 43 Dla poniższych liczb $z \in C$ znaleźć (bez użycia funkcji cyklotometrycznych) $\arg z$ oraz $Arg z$:

a) $z = -7$, b) $z = -\frac{\pi}{2}$, c) $z = -1 + i$, d) $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Zadanie 44 Zauważyć, że jeśli $z = x + iy \in C$ oraz $x > 0$, to $\arg z = \arctg(\frac{y}{x})$. Czy jest to prawdą gdy $x < 0$? Dlaczego?

Zadanie 45 Używając funkcji cyklotometrycznych wyznaczyć $\arg(-1 - 2i)$.

Zadanie 46 Podać postać trygonometryczną następujących liczb:

a) $7 + 7i$; b) $\sqrt{3} - i$;
c) $-5 + 5\sqrt{3}$; d) $\sin \alpha + i \cos \alpha$.

Zadanie 47 Znaleźć część rzeczywistą i urojoną następujących liczb:

a) $(1 - i)^{12}$; b) $(1 + i\sqrt{3})^8$; c) $(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^{10}$;
d) $(2\sqrt{3} - 2i)^{30}$; e) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$; f) $(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6})^{24}$.

Zadanie 48 Pokazać, że jeśli $a = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $\alpha, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, to rozwiązaniami równania $z^n = a$ są dokładnie liczby

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right),$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Zadanie 49 Rozwiązać równania:

a) $z^4 = 1$; b) $z^8 = -1$; c) $z^4 = i$;

d) $(z + i)^4 = 1$; e) $z^8 = 1 + i$; f) $z^4 = 1 - i$.

Naszkicować rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 50 Pokazać, że rozwiązania równania $z^n = 1$ są na płaszczyźnie zespolonej wierzchołkami n -kąta foremnego.