1 Przestrzenie metryczne

Definicja

Niech X będzie zbiorem niepustym. *Metryką* w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ spełniającą następujące warunki:

(i) $\forall x \in X :\ d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $\forall x, y \in X :\ d(x, y) = d(y, x)$ (warunek symetrii);

(iii) $\forall x, y, z \in X :\ d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$ (warunek trójkąta).

Parę (X, d) nazywamy *przestrzenią metryczną.*

Definicja (kula otwarta, kula domknięta)

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.

Kulą (otwartą) o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r \geqslant 0$ nazywamy zbiór: $K(x_0, r) \overset{df}{=} \Big\{x \in X :\ d(x_0, x) < r\Big\}$.

Kulą domkniętą o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r \geqslant 0$ nazywamy zbiór: $\overline{K}(x_0, r) \overset{df}{=} \Big\{x \in X :\ d(x_0, x) \leqslant r\Big\}$.

Przykład (Metryka dyskretna)

Niech $X \neq \emptyset$ będzie dowolnym zbiorem oraz niech

$$d(x, y) \overset{df}{=} \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = y. \end{cases} \qquad \forall\ x, y \in X.$$

Zauważmy, iż wartość funkcji d dla dwóch dowolnych punktów wynosi 1, gdy są one różne oraz wynosi 0, gdy jest to ten sam punkt.

Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowana funkcja d jest metryką, zatem para (X, d) jest przestrzenią metryczną. Metrykę tę będziemy nazywali metryczną dyskretną. Faktycznie, z definicji wynika, że dla dowolnych $x, y \in X$ mamy

$d_d(x, y) = 0 \iff x = y$

oraz

$d_d(x, y) = d_d(y, x)$.

Dla sprawdzenia warunku trójkąta weźmy $x, y, z \in X$. Rozważymy następujące przypadki.

1) Jeśli $x = z$, to $d(x, z) = 0$ zatem zawsze zachodzi $d_d(x, z) = 0 \leqslant d_d(x, y) + d_d(y, z)$.

2) Jeśli $x \neq z$, to $x \neq y$ lub $y \neq z$. Wtedy również $d_d(x, z) = 1 \leqslant d_d(x, y) + d_d(y, z)$.

Łatwo także zauważyć, jak będą wyglądały kule w tej przestrzeni metrycznej. Jeśli $r \in (0, 1]$, to kula o promieniu r składa się z samego środka, ale jeśli $r > 1$, to kulą jest cała przestrzeń X. Mamy zatem

$$K(x_0, r) = \begin{cases} \emptyset & \text{gdy} \quad r = 0, \\ \{x_0\} & \text{gdy} \quad r \in (0, 1], \\ X & \text{gdy} \quad r > 1, \end{cases}$$

$$\overline{K}(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{gdy} \quad r \in [0, 1), \\ X & \text{gdy} \quad r \geqslant 1. \end{cases}$$

Zatem w przestrzeni metrycznej dyskretnej kulami i kulami domkniętymi są jedynie: $\emptyset$, zbiory jednopunktowe oraz cała przestrzeń.

Przykład
Niech $X = \mathbb{R}^n$ oraz niech $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(x, y) \stackrel{df}{=} \max_{i=1,\ldots,N} |x_i - y_i|,$$

$$d_1(x, y) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|,$$

$$d_2(x, y) \stackrel{df}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_N)$ oraz $y = (y_1, \ldots, y_N)$.

Para $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ jest przestrzenią metryczną. Funkcję d_∞ nazywamy metryką maksimum (supremum) w $\mathbb{R}^n$.

Para $(\mathbb{R}^n, d_1)$ jest przestrzenią metryczną. Funkcję d_1 nazywamy metryką taksówkową w $\mathbb{R}^n$.

Para $(\mathbb{R}^n, d_2)$ jest przestrzenią metryczną. Funkcję d_2 nazywamy metryką euklidesową w $\mathbb{R}^n$, a parę $(\mathbb{R}^n, d_2)$ nazywamy przestrzenią metryczną euklidesową.

Przykład (Metryka rzeka)
Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ jest gęstym lasem oraz pewna prosta l jest rzeką. Aby zmierzyć odległość dwóch punktów $x, y \in \mathbb{R}^2$, musimy wyciąć ścieżkę od x do y, przy czym możemy to robić tylko prostopadle do rzeki.

Mamy dwa przypadki:

(1) Jeśli punkty x i y są końcami odcinka prostopadłego do rzeki l, to ich odległość jest równa zwykłej odległości euklidesowej na płaszczyźnie.

(2) Jeśli zaś punkty x i y nie leżą na prostej prostopadłej do rzeki l, to musimy utworzyć dwie ścieżki jedną od punktu x do rzeki, a drugą od rzeki do punktu y, zawsze prostopadle do rzeki. Teraz odległość od x do y będzie równa sumie długości (euklidesowej) obu ścieżek oraz odległości tych ścieżek na rzece. Nietrudno sprawdzić, że tak utworzona funkcja d jest metryką w $\mathbb{R}^2$.

Nazywamy ją metryką rzeką.

Definicja

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, niech $x_0 \in X$ oraz $A \subseteq X$.

(1) Zbiór $U \subseteq X$ nazywamy otwartym, jeśli każdy punkt zbioru U zawiera się w U wraz z pewną kulą, czyli

$\forall x \in U \ \exists r > 0 : \ K(x, r) \subseteq U$.

(2) Punkt x_0 nazywamy punktem wewnętrznym zbioru $A \subseteq X$, jeśli istnieje kula o środku w punkcie x_0 (i dodatnim promieniu) taka, że zawiera się w A. Wnętrzem zbioru A nazywamy zbiór jego punktów wewnętrznych i oznaczamy go $\int A$.

(3) Domknięciem zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór wszystkich punktów A oraz wszystkich punktów skupienia zbioru A i oznaczamy go $\overline{A}$.

(4) Brzegiem zbioru A nazywamy zbiór $\mathrm{Fr}\, A := \overline{A} \setminus \int A$.

Przykład

W przestrzeni metrycznej dyskretnej każdy zbiór jest otwarty, bo wraz z każdym punktem x zawiera kulę $K(x, 1) = \{x\}$.

Twierdzenie (Zbiory w przestrzeniach metrycznych)

Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to

(1) Każda kula jest zbiorem otwartym w X.

(2) Zbiór $U \subseteq X$ jest otwarty, wtedy i tylko wtedy, gdy $U^c = X \setminus U$ (dopełnienie zbioru U) jest zbiorem domkniętym.

(3) Kula domknięta jest zbiorem domkniętym.

(4) Jeśli x_0 jest punktem skupienia zbioru $A \subseteq X$, to dowolna kula o środku w punkcie x_0 (i dodatnim promieniu) zawiera nieskończenie wiele punktów zbioru A.

(5) Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

(6) Przecięcie (część wspólna) skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

(7) Przecięcie (część wspólna) dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

(8) Suma skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

(9) Dla dowolnego zbioru $A \subseteq X$, zbiór $\overline{A}$ (domknięcie zbioru A) jest zbiorem domkniętym.

Definicja

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $A \subseteq X$:

(1) Pokryciem otwartym zbioru A nazywamy dowolną rodzinę $\{U_s\}_{s\in S} \subseteq 2^X$ zbiorów otwartych taką, że $\bigcup_{s\in S} U_s \supseteq A$.

Pokrycie to nazywamy skończonym, jeśli $|S| < +\infty$.

(2) Mówimy, że $\{U_s\}_{s\in T}$ jest podpokryciem pokrycia $\{U_s\}_{s\in S}$ zbioru A, jeśli $\{U_s\}_{s\in T}$ jest pokryciem zbioru A oraz $T \subset S$.

(3) Mówimy, że zbiór A jest *zwarty*, jeśli z każdego pokrycia otwartego zbioru A można wybrać podpokrycie skończone.

Twierdzenie

W dowolnej przestrzeni metrycznej X mamy

(1) Zbiór skończony (niepusty) jest zwarty.

(2) Podzbiór zwarty przestrzeni metrycznej jest domknięty.

(3) Podzbiór zwarty przestrzeni metrycznej jest ograniczony.

(4) Podzbiór domknięty zbioru zwartego jest zwarty.

(5) Część wspólna zbioru zwartego i domkniętego jest zbiorem zwartym.

2 Przestrzenie unormowane

Definicja

Niech X będzie przestrzenią liniową (wektorową) nad ciałem K ($K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$).

Odwzorowanie $\|\cdot\|\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ nazywamy normą w X, jeśli:

(1) $\forall \mathbf{x} \in X: \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(2) $\forall \mathbf{x} \in X, \quad \lambda \in K: \quad \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$ (jednorodność);

(3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X: \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (subaddytywność).

Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią unormowaną.

Przykład 3.2.

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ możemy wprowadzić następujące normy:

$$\|\mathbf{x}\|_2 \stackrel{df}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^n \text{ (norma euklidesowa)},$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^n \text{ (norma taksówkowa)},$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \stackrel{df}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i|, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^n \text{ (norma supremum)}.$$

Okazuje się, że każda przestrzeń unormowana jest w naturalny sposób przestrzenią metryczną. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeśli $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją zadaną przez $d(x,y) \stackrel{df}{=} \|x-y\|$, to (X, d) jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że d jest metryką zadaną przez normę $\|\cdot\|$.

Dowód

Załóżmy, że $\|\cdot\|$ jest normą w X. Pokażemy, że odwzorowanie $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ zadane przez $d(x,y) \stackrel{df}{=} \|x-y\|$ jest metryką w X.

(1) Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in X : d(x,y) = \|x-y\| \geqslant 0$

oraz $d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x = y$.

(2) Dla dowolnych $x, y \in X$ mamy $d(x,y) = \|x-y\| = |-1|\|x-y\| = \|(-1)(x-y)\| = \|-x+y\| = \|y-x\| = d(y,x)$.

(3) Dla dowolnych $x, y, z \in X$ mamy $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leqslant \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$,

a więc zachodzi warunek trójkąta dla d.

Pokazaliśmy zatem, że d jest metryką.

Uwaga

(1) Z powyższego twierdzenia wynika, że każda norma zadaje metrykę.

(2) Nie każda metryka jest zadana przez normę.

(3) Zbieżność w sensie metryki zadanej przez normę nazywamy zbieżnością silną lub zbieżnością w normie, to znaczy jeśli $\{x_n\} \subseteq X$ jest ciągiem, to $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \quad \stackrel{df}{\iff} \quad \|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

(4) Normy: euklidesowa, taksówkowa, maksimum, zdefiniowane w przykładzie, zadają odpowiednio metryki: euklidesową, taksówkową, maksimum.

W przypadku norm można rozważać ich równoważność.

Definicja

Dwie normy $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$ w przestrzeni unormowanej X nazywamy równoważnymi, jeśli $\exists m, M > 0 \;\; \forall x \in X: \;\; m\|x\|_a \;\leqslant\; \|x\|_b \;\leqslant\; M\|x\|_a$.

Równoważność norm ma następujące właściwości.

Uwaga

(1) Relacja równoważności norm jest relacją równoważnościową w zbiorze wszystkich norm na danej przestrzeni unormowanej.

(2) Normy: euklidesowa $\|\cdot\|_2$; maksimum $\|\cdot\|_\infty$ i taksówkowa $\|\cdot\|_1$ są równoważne.

Okazuje się, że w przestrzeniach wektorowych skończenie wymiarowych wszystkie normy są równoważne.

Twierdzenie

Wszystkie normy w $\mathbb{R}^n$ są równoważne.

Kolejne twierdzenie mówi, że odwzorowanie normy $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest ciągłe (oczywiście w przestrzeni X rozważamy metrykę zadaną przez normę, a w $\mathbb{R}$ metrykę euklidesową).

Twierdzenie

Norma jest funkcją ciągłą, to znaczy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

W dowodzie powyższego twierdzenia wykorzystamy następujący lemat, będący wariantem nierówności trójkąta.

Lemat

Jeśli X jest przestrzenią unormowaną, to $\forall x, y \in X: \;\; \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \;\leqslant\; \|x - y\|$.

Dowód lematu

Korzystając z subaddytywności normy, dla dowolnych $x, y \in X$ mamy $\|x\| \;=\; \|x + (-y) + y\| \;\leqslant\; \|x - y\| + \|y\|$,

czyli $\|x\| - \|y\| \;\leqslant\; \|x - y\|$.

Analogicznie pokazujemy, że $\|y\| - \|x\| \;\leqslant\; \|x - y\|$.

Obie powyższe nierówności implikują nierówność w tezie lematu.

Dowód twierdzenia

Warunek $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ oznacza, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| \;=\; 0$.

Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z powyższej równości wynika, że $\exists N \forall n \geqslant N$: $\|x_n - x\| \ \leqslant \ \varepsilon$.

Zatem dla $n \geqslant N$ mamy $\Big| \|x_n\| - \|x\| \Big| \ \leqslant \ \|x_n - x\| \ \leqslant \ \varepsilon$.

Zatem pokazaliśmy, że $\|x_n\| \xrightarrow{\mathbb{R}} \|x\|$.

W przestrzeniach wektorowych możemy mówić o wypukłości zbiorów.

Definicja

Niech X będzie przestrzenią unormowaną oraz $A \subseteq X$.

(1) Jeśli $x, y \in X$, to odcinkiem w X łączącym punkty x i y nazywamy zbiór $[x, y] \ \stackrel{df}{=} \ \Big\{ z \in X : \ z = \lambda x + (1 - \lambda) y : \quad \lambda \in [0, 1] \Big\}$.

(2) Mówimy, że zbiór A jest wypukły, jeśli $\forall x, y \in A : \quad [x, y] \subseteq A$.

Twierdzenie

Kule i kule domknięte w przestrzeniach unormowanych są wypukłe.

Dowód

Niech $a \in X$ oraz $r > 0$. Pokażemy, że kula $K(a, r)$ jest zbiorem wypukłym. W tym celu wybierzmy dowolne $x_1, x_2 \in K(a, r)$. Z definicji kuli wynika, że $\|x_1 - a\| < r, \quad \|x_2 - a\| < r$.

Niech $x \in [x_1, x_2]$. Należy pokazać, że $x \in K(a, r)$. Z definicji odcinka w X wiemy, że $\exists \lambda \in [0, 1] : \ x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$.

Zatem $\|x - a\| \ = \ \|\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 - a\| \ = \ \|\lambda (x_1 - a) + (1 - \lambda)(x_2 - a)\| \ \leqslant \ \lambda \|x_1 - a\| + (1 - \lambda)\|x_2 - a\| \ < \ \lambda r + (1 - \lambda) r \ = \ r$.

Zatem pokazaliśmy, że $x \in K(a, r)$.

Dowód, że $\overline{K}(a, r)$ jest zbiorem wypukłym, jest analogiczny.

Powyższe twierdzenie dostarcza nam pewnego warunku koniecznego na to, aby dana przestrzeń metryczna była zadana przez normę.

Wniosek

Metryka rzeka w $\mathbb{R}^2$ nie jest zadana przez żadną normę, ponieważ kule w nie są zbiorami wypukłymi.

Przypomnijmy, że przestrzeń metryczną nazywamy zupełną, gdy każdy ciąg Cauchy'ego tej przestrzeni ma granicę.

Definicja

Przestrzenią Banacha nazywamy przestrzeń unormowaną zupełną.

Przykłady
(1) $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2\right)$ jest przestrzenią Banacha.
(2) Przestrzeń $C\Big([a,b];\mathbb{R}\Big)$ z normą $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \Big|f(x)\Big|$

Przykłady cd.
1. l^∞ — ciągi ograniczone, z normą supremum;

$$l^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) : \sup_n |x_n| < \infty\}.$$

2. c — ciągi zbieżne, z normą supremum;
3. c_0 — ciągi zbieżne do zera, z normą supremum;
4. l^1:

$$l^1 = \left\{(x_1, x_2, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}.$$

z normą $\|x\| = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$;
5. l^2:

$$l^2 = \left\{(x_1, x_2, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\right\}.$$

z normą $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2}$;
6. l^p, $1 \leqslant p < \infty$:

$$l^p = \left\{(x_1, x_2, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}.$$

z normą $\|x\| = \left(\sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p}\right)^{1/p}$;
7. $CB(\mathbb{R})$ — przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}$, z normą supremum.
Przypomnienie (wprowadzenie?) relacji równoważności.

Definicja
Relacją dwuargumentową R na zbiorze X nazywamy pewien podzbiór Y zbioru $X \times X$.
Piszemy $xRy \iff (x, y) \in Y$.

Definicja
Relacją równoważności nazywamy taką relację R, która jest
1. zwrotna, tzn. $\forall x \in X\ xRx$;

2. symetryczna, tzn. $\forall x,\ y \in X\ xRy \implies yRx$;
3. przechodnia, tzn. $\forall x,\ y,\ z \in X\ xRy \wedge yRz \implies xRz$.

Przykład
$X = \mathbb{Z}$, $nRm \iff 2|(n-m)$.
Klasy abstrakcji:
$[0]_R$ — liczby parzyste
$[1]_R$ — liczby nieparzyste
8. $L^1(R)$ — przestrzeń (klas abstrakcji) funkcji bezwzględnie całkowalnych z normą

$$\|f\| = \int_{\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

2.1 Przestrzenie unitarne

W przestrzeniach wektorowych możemy wprowadzić pojęcie iloczynu skalarnego. Dzięki niemu będziemy mogli mówić o prostopadłości wektorów. Okaże się, że przestrzenie z iloczynem skalarnym są także przestrzeniami unormowanymi z naturalnie wprowadzoną normą.

Definicja
Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. Odwzorowanie $(\cdot|\cdot)\colon X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy iloczynem skalarnym w X, jeśli:
(1) $\forall x \in X:\ \ \Big[(x|x) \geqslant 0\Big]$ i $\Big[(x|x) = 0 \iff x = \mathbf{0}\Big]$,
(2) $\forall x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}:\ \ (\lambda x|y) = \lambda(x|y)$,
(3) $\forall x, y, z \in X:\ \ (x+y|z) = (x|z) + (y|z)$,
(4) $\forall x, y \in X:\ \ (x|y) = (y|x)$ (symetria).
Parę $(X, (\cdot|\cdot))$ nazywamy przestrzenią unitarną.

Uwaga
(a) Warunki (2) i (3) mówią, że iloczyn skalarny jest liniowy ze względu na pierwszą zmienną.
(b) Ze względu na symetrię (4), iloczyn skalarny jest także liniowy ze względu na drugą zmienną, zatem jest on dwuliniowy.

Przykład
Odwzorowanie zdefiniowane przez $(x|y) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ dla $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^n$

jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$. Nazywamy go standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$. Iloczyn ten znamy ze szkoły dla przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

Sprawdzimy kolejno punkty definicji iloczynu skalarnego.

(1) Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ mamy $(x|x) = \sum_{n=1}^n x_i^2 \geqslant 0$

oraz $(x|x) = 0 \iff \sum_{n=1}^n x_i^2 = 0 \iff x_1 = \ldots = x_N \iff x = \mathbf{0}$.

(2) Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ mamy $(\lambda x, y) = \sum_{n=1}^n \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{n=1}^n x_i y_i = \lambda(x|y)$

(3) Dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ mamy $(x + y|z) = \sum_{n=1}^n (x_i + y_i)z_i = \sum_{n=1}^n (x_i z_i + y_i z_i) = \sum_{n=1}^n x_i z_i + \sum_{n=1}^n y_i z_i = (x|z) + (y|z)$.

(4) Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ mamy $(x|y) = \sum_{n=1}^n x_i y_i = \sum_{n=1}^n y_i x_i = (y|x)$.

Zatem pokazaliśmy, że odwzorowanie $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$.

Okazuje się, że przestrzeń z iloczynem skalarnym jest przestrzenią unormowaną.

Twierdzenie

Jeśli $(X, (\cdot|\cdot))$ jest przestrzenią unitarną oraz $\forall x \in X : \ \|x\| \overset{df}{=} \sqrt{(x|x)}$, to $\|\cdot\|$ jest normą w X.

Mówimy, że $\|\cdot\|$ jest normą zadaną przez iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)$.

W dowodzie wykorzystamy następującą nierówność Schwarza, zachodzącą w przestrzeniach unitarnych.

Lemat [nierówność Schwarza]

Jeśli $(X, (\cdot|\cdot))$ jest przestrzenią unitarną, to $\forall x, y \in X : \ |(x|y)| \leqslant \|x\|\|y\|$.

Dowód lematu.

Ustalmy dowolne $x, y \in X$. Jeśli $y = \mathbf{0}$ to powyższa nierówność jest oczywistą równością. Załóżmy, że $y \neq \mathbf{0}$. Niech $\lambda = \frac{(x|y)}{(y|y)}$. Korzystając z dwuliniowości iloczynu skalarnego, mamy: $0 \leqslant (x - \lambda y|x - \lambda y) = (x|x) - 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y) = (x|x) - 2\frac{(x|y)^2}{(y|y)} + \frac{(x|y)^2}{(y|y)}$

$= (x|x) - \frac{(x|y)^2}{(y|y)} = \|x\| - \frac{(x|y)^2}{\|y\|}$.

Zatem mamy $\frac{(x|y)^2}{\|y\|^2} \leqslant \|x\|^2$,

skąd $(x|y)^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$,

a zatem $|(x|y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$,

co należało dowieść.

Dowód twierdzenia

(1) $\|x\| = 0 \iff (x|x) = 0 \iff x = \mathbf{0}$,

a więc pierwszy warunek w definicji normy jest spełniony.

(2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(x|x)} = |\lambda|\|x\|$,

zatem drugi warunek (jednorodność) w definicji normy jest spełniony.

(3) Korzystając z nierówności Schwarza, mamy $\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y^2\| = (\|x\| + \|y\|)^2$,

a więc $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

zatem trzeci warunek (subaddytywność) w definicji normy jest spełniony.

Przykład

Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$ dany wzorem $(x|y) \overset{df}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$ dla $x = (x_1, \ldots, x_N),\ y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^n$

zadaje normę euklidesową, bo $\sqrt{(x|x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|_2$.

Podobnie jak dla przestrzeni unormowanych, tak i dla przestrzeni unitarnych szczególną rolę odgrywają przestrzenie unitarne zupełne.

Definicja

Przestrzenią Hilberta nazywamy przestrzeń unitarną zupełną.

Twierdzenie [ciągłość iloczynu skalarnego]

Iloczyn skalarny w przestrzeni unitarnej jest funkcją ciągłą, to znaczy

$$\left[x_n \xrightarrow{X} x,\ y_n \xrightarrow{X} y\right] \implies \left[(x_n|y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} (x|y)\right]$$

(oczywiście zbieżność $x_n \xrightarrow{X} x$ oznacza zbieżność w normie zadanej przez iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)$).

W przestrzeni unitarnej możemy wprowadzić pojęcie prostopadłości wektorów.

Definicja

Niech $\big(X, (\cdot|\cdot)\big)$ będzie przestrzenią unitarną.

(1) Jeśli $(x|y) = 0$, to mówimy, że wektory x i y są ortogonalne (lub prostopadłe) i piszemy $x \perp y$.

(2) Niech Y będzie podprzestrzenią wektorową X. Mówimy, że wektor x jest ortogonalny (prostopadły, normalny) do podprzestrzeni Y, jeśli

$\forall y \in Y :\ x \perp y$.

Piszemy $x \perp Y$.

(3) Mówimy, że wektory $a_1, \ldots, a_k \in X$ tworzą układ ortogonalny, jeśli

$(a_i|a_j) = 0 \qquad \forall\ i \neq j$.

(4) Mówimy, że wektory $a_1, \ldots, a_k \in X$ tworzą układ ortonormalny, jeśli

$\forall i, j: \quad (a_i|a_j) = \delta_{ij} \overset{df}{=} \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(to znaczy wektory $a_1, \ldots, a_k$ są parami ortogonalne oraz mają normę 1).

Twierdzenie

Każda przestrzeń unitarna skończenie wymiarowa ma bazę ortonormalną (to znaczy bazę tworzącą układ ortonormalny).

Przykład

Baza kanoniczna w $\mathbb{R}^n$ jest bazą ortonormalną.

Twierdzenie (warunek równoległoboku)

Jeśli $\big(X, (\cdot|\cdot)\big)$ jest przestrzenią unitarną oraz $\|\cdot\|$ jest normą zadaną przez iloczyn skalarny, to

$\forall x, y \in X: \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \; = \; 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big).$

Dowód

Dla dowolnych ustalonych $x, y \in X$ liczymy

$\|x+y\|^2 \; = \; \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

oraz

$\|x-y\|^2 \; = \; \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2.$

Dodając stronami powyższe równości, dostajemy tezę twierdzenia.

Twierdzenie (Twierdzenie Pitagorasa)

Jeśli $\big(X, (\cdot|\cdot)\big)$ jest przestrzenią unitarną oraz $\|\cdot\|$ jest normą zadaną przez iloczyn skalarny, to

$\forall x, y \in X: \quad \Big[x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\Big].$

Dowód

Dla dowolnych ustalonych $x, y \in X$ liczymy

$\|x+y\|^2 \; = \; \|x\|^2 + 2\underbrace{(x|y)}_{=0} + \|y\|^2 \; = \; \|x\|^2 + \|y\|^2,$

co należało dowieść.