

ALGEBRA M1 – LISTA 1

Liczby zespolone

1. Obliczyć, sprowadzając do postaci $a + ib$:

$$(a) (1 + i)(2 - 3i), \quad (b) (-6 + 5i) + (2 - 4i), \quad (c) (-5 + \sqrt{2}i) - (2 - i)$$

$$(d) (1 + i)(2 - i)(3 + 2i), \quad (e) (1 - 2i)^3, \quad (f) (1 + i)^4, \quad (g) (-2i)^6,$$

$$(h) \frac{1 + 2i}{2 - 3i}, \quad (i) \frac{2 - \sqrt{2}i}{2 + \sqrt{3}i}, \quad (j) \frac{1 + 3i}{3 + 4i} + \frac{1 - 4i}{3 - 4i}, \quad (k) 2 - 3i + \frac{1 - 2i}{i + 2}$$

2. Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną każdej z podanych liczb:

$$(a) 2 + 3i + \frac{1}{2 + 3i}, \quad (b) \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)^3} - \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)^3}$$

3. Rozwiązać każde z podanych równań dla rzeczywistych x, y :

$$(a) (1 + i)x + (1 - 2i)y = 1 - i, \quad (b) \frac{x - 3}{1 + i} + \frac{y + 3}{1 - i} = 1 + i,$$

$$(c) x^2 + iy^2 = 1 + 2i, \quad (d) x^2 - iy^2 = 1 + i.$$

4. Rozwiązać każde z podanych równań dla zespolonych z :

$$(a) z^2 = i, \quad (b) z^2 = -i, \quad (c) 4 + 2i = (1 + i)z,$$

$$(d) z^2 + 4i = 0, \quad (e) \frac{z + 2}{i - 1} = \frac{3z + i}{2 + i}, \quad (f) z^2 - 6z + 10 = 0.$$

5. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające podany warunek:

$$(a) \operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} z = 2, \quad (b) \operatorname{Re}(iz) \geq 1, \quad (c) \operatorname{Im}(iz) \leq 2.$$

6. Definiujemy n -tą potęgę liczby zespolonej z w naturalny sposób, tzn.

$$z^0 = 1, \quad z^n = z^{n-1} \cdot z, \quad z^{-n} = 1/z^n$$

dla $n \geq 1$. Obliczyć i^n dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $(1 + i)^n$ dla $n = 1, 2, 3, 4$.

9. Uzasadnić równości

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$$

$$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$$

$$\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$$

10. Wykazać następujące własności operacji sprzężenia liczb zespolonych:

$$(a) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$$

$$(b) z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$$

$$(c) \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im} z$$

- (d) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$
 (e) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
 (f) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

11. Rozwiązać każde z równań:

(a) $2z + (3 - i)\bar{z} = 5 + 4i$, (b) $z + i = \overline{z + i}$, (c) $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$,
 (d) $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 5 + 3i$, (e) $i\operatorname{Re}z + i\operatorname{Im}z = 2i - 3$, (f) $\bar{z} = z^2$.

w ciele liczb zespolonych. Podać interpretację geometryczną zbioru rozwiązań.

13. Wykazać następujące własności modułu liczb zespolonych:

- (a) $|\operatorname{Re}z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}z| \leq |z|$
 (b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 (c) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
 (d) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
 (e) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

14. Obliczyć moduły liczb zespolonych

$$2 + 7i, \quad \sin\alpha + i\cos\alpha, \quad \frac{4 + i}{3 + 2i}, \quad (1 + \sqrt{2}i)^4, \quad \frac{(3 - \sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{2} + 2i)^3}$$

15. Pokazać, że jeżeli $z_2 \neq 0$ oraz $z_0 \neq 0$, to zachodzi prawo skracania

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_0}{z_2 \cdot z_0}$$

dla każdego $z_1 \in \mathbb{C}$.

16. Pokazać, że jeżeli $z_2 \neq 0$ oraz $z_4 \neq 0$, to zachodzą wzory

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_4 + z_2 z_3}{z_2 z_4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$$

17. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ będą różne, niezerowe i takie, że $|a| = |b| = |c|$. Pokazać, że jeżeli pierwiastek równania $az^2 + bz + c = 0$ ma moduł równy jeden, to $b^2 = ac$.

Romuald Lenczewski