ALGEBRA M1 – LISTA 2

Liczby zespolone

1. Wyznaczyć postać trygonometryczną podanych liczb zespolonych:

$$(a)\ -3i,\quad (b)\ 1+\sqrt{3}i,\quad (c)\ 2-2\sqrt{3}i,\quad (d)\ \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^3,\quad (e)\ \frac{1+i\mathrm{tg}\alpha}{1-i\mathrm{tg}\alpha}$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Korzystając ze wzoru de Moivre'a, obliczyć

$$(a)\ (1+i)^{11},\quad (b)\ (2-2\sqrt{3}i)^7,\quad (c)\ \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10},\quad (d)\ \left(\sin\frac{\pi}{18}+i\cos\frac{\pi}{18}\right)^6.$$

3. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić wzór

$$1+z+z^2+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

dla $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

4. Korzystając z zadania 3, uzasadnić wzory

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

5. Korzystając ze wzoru de Moivre'a, wyrazić $\cos 4x$ oraz $\sin 4x$ przez funkcje $\sin x$ oraz $\cos x$.

6. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb zespolonych spełniających warunki

$$(a)\ \mathrm{Im}(z^3)<0,\quad (b)\ \mathrm{Re}(z^4)\geq 0,\quad (c)\ \mathrm{Im}(z^2)\geq \mathrm{Re}((\overline{z})^2),\quad (d)\ \mathrm{Im}\frac{(1+i)z}{(1-i)\overline{z}}\geq 0,$$

$$(e)\ |z+i|=5,\quad (f)\ |z-1|<3,\quad (g)\ 1\leq|z+i|\leq 2,\quad (h)\ |z-i|=|z+i|.$$

7. Znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki na argument główny

$$(a)\ \mathrm{Arg}((1+i)z)=\frac{3\pi}{2},\quad (b)\ \mathrm{Arg}(z^4)=\pi,\quad (c)\ \frac{\pi}{3}<\mathrm{Arg}(z^3)<\frac{\pi}{2}$$

8. Wyprowadzić wzór na $\sqrt{a+ib}$, korzystając z postaci algebraicznej liczb zespolonych.

9. Obliczyć i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki

$$\sqrt{3-4i},\quad \sqrt{-3-4i},\quad \sqrt{1-i\sqrt{3}},\quad \sqrt[6]{1},\quad \sqrt[3]{2+2i},\quad \sqrt[4]{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

10. Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równania

$$(a)\ z^2+z+1=0, \quad (b)\ \ z^2-5z+(7+i)=0, \quad (c)\ z^4-2z^2+4=0, \quad (d)\ \overline{z}=z^4.$$

$$(e)\ z^4=1, \quad (f)\ z^6=(1+2i)^{12}, \quad (g)\ z^3=(1-i)^3, \quad (h)\ (z-i)^4=(iz+4)^4,$$

w trzech ostatnich przykładach odgadując jedno z rozwiązań.

11. Niech $z, w \in \mathbb{C}$ będą takie, że $\overline{z}w \neq 1$ oraz $|z|=1$ lub $|w|=1$. Pokazać, że wtedy

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|=1$$

12. Dowieść, że dla pierwiastków $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ stopnia n z jedności, gdzie $n \geq 2$, zachodzą równości

$$w_0+w_1+\ldots+w_{n-1}=0$$

$$w_0 w_1 \ldots w_{n-1}=(-1)^{n-1}$$

13. Pokazać, że wszystkie pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej z można otrzymać, mnożąc jeden z nich przez wszystkie pierwiastki stopnia $n \in \mathbb{N}$ z jedności.

14*. Sprowadzić do postaci $f(x,y)+ig(x,y)$ funkcje zmiennej zespolonej $z=x+iy$ postaci

$$h(z)=\frac{1}{1-z^n}, \quad k(z)=\frac{1}{1+e^z}$$

dla wszystkich z, dla których te funkcje są zdefiniowane.

15*. Pierwiastek n-tego stopnia z jedności w_k jest *pierwotny* jeżeli $w_k^j \neq 1$ dla każdego $1 \leq j < n$. Pokazać, że jeżeli w_k jest pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności, to każdy pierwiastek n-tego stopnia z jedności ma postać w_k^p, gdzie $p \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

16*. Pokazać, że liczba w_k jest pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności wtedy i tylko wtedy gdy liczby k oraz n są względnie pierwsze.

Romuald Lenczewski, Jacek Serafin