

### ALGEBRA M1 – LISTA 3

#### Wielomiany

1. Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzielenia wielomianów  $P/Q$ , gdzie

$$(a) P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad Q(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$(b) P(z) = z^5 - z^3 + 1, \quad Q(x) = (z - i)^3.$$

2. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianów  $P/Q$ , gdzie

$$P(x) = x^{30} + 3x^{14} + 2, \quad Q(x) = x^3 + 1.$$

3. Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite wielomianów

$$(a) W(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4, \quad (b) W(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6.$$

4. Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów

$$(a) W(x) = 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1, \quad (b) W(x) = x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}.$$

5. Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone wielomianów

$$(a) W(z) = z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i), \quad (b) W(z) = z^4 - 3iz^2 + 4,$$

$$(c) W(z) = z^4 - z^2 - 2, \quad (d) W(z) = z^4 - 3z^3 - 5z^2 + 3z + 4.$$

6. Wyznaczyć rozkład podanego wielomianu na nierozkładalne czynniki rzeczywiste oraz zespolone:

$$(a) W(z) = z^4 + 1, \quad (b) W(z) = z^4 + 5z^2 + 6,$$

$$(c) W(z) = z^3 - 6z - 9, \quad (d) W(z) = z^6 + 8, \quad (e) W(z) = z^8 + 16.$$

7. Uzasadnić, że jeżeli liczba  $z_0$  jest pierwiastkiem wielomianu zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych, to jej sprzężenie  $\bar{z}_0$  też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

8. Znając pierwiastek  $z_1 = 2 + i$  wielomianu  $W(z) = z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25$ , znaleźć jego pozostałe pierwiastki.

9. Rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste podane funkcje wymierne:

$$W(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(x - 2)}, \quad U(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2(x + 3)}, \quad V(x) = \frac{1}{x^4 + 1}.$$

10. Funkcje wymierne z zadania 9 oraz funkcje postaci

$$W(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z^2 + 2z + 2)^2}, \quad U(z) = \frac{4i}{z^4 + 4}$$

rozłożyć na zespolone ułamki proste.

11. Uzasadnić, że wszystkie pierwiastki wielomianu  $p(z) = z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1$  mają

moduł równy jeden. (Wskazówka: zadanie 3 z listy 2.)

12\*. (zadanie dodatkowe) Znaleźć wszystkie pierwiatki wielomianu  $p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ . (Wskazówka: przydatne może być wyłączenie przed nawias czynnika  $z^2$  i podstawienie  $t = z + 1/z$ .) W celu lepszej "identyfikacji" pierwiastków wielomianu  $p$  (a w szczególności wartości  $x_1$  części rzeczywistej pierwiastka leżącego w pierwszej ćwiartce układu), posłużyć się zadaniem 3 z listy 2. Ostatecznie skonstruować pięciokąt foremny za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki (może przydać się odcinek o długości  $x_1$ ).

13\*. (zadanie dodatkowe) Pokazać, że rozwiązywanie równań postaci  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , gdzie  $a \neq 0$  oraz  $b \neq 0$ , można sprowadzić do rozwiązywania równań postaci  $y^3 + py + q = 0$  za pomocą podstawienia  $y = x + h$ , gdzie  $h$  jest odpowiednio dobraną stałą. Zastosować podstawienie tego typu do równania  $x^3 - 3x^2 - 9x + 17 = 0$ .

14\*. (zadanie dodatkowe) Pokazać, że rozwiązywanie równania postaci  $x^3 + px + q = 0$  można sprowadzić do rozwiązywania równania kwadratowego w innej zmiennej (wskazówka: zastosować w pierw podstawienie  $x = y - \frac{p}{3y}$ ). Zastosować podstawienie tego typu do rozwiązania równania  $x^3 + 9x + 2 = 0$ .

*Romuald Lenczewski i Jacek Serafin*