ALGEBRA M1 – Lista 4
Macierze

Zad.1. Niech

$$A=\left[\begin{array}{rrr}1&-2&3\\4&-1&5\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{rrr}5&-4&-1\\0&-3&2\\-2&7&1\end{array}\right], C=\left[\begin{array}{rr}4&1\\-1&3\\-2&1\end{array}\right], D=\left[\begin{array}{r}1\\-1\\2\end{array}\right].$$

Wyznaczyć, jeśli to możliwe, macierze:

$$A+C, A+C^T, 2A^T-3C, AB, BA, AC, CA^T, (CA)^TB, AD, DA, BD.$$

Zad.2. Wyznaczyć k-te potęgi macierzy

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&\dots&0\\0&\lambda_2&0&\dots&0\\&&&\ddots&\\0&0&0&\dots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

Zad.3 Macierz kwadratową A nazywamy idempotentną, jeśli dla pewnego $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, zachodzi $A^k=\mathbb{I}$. Wyznaczyć wszystkie idempotentne macierze stopnia 2 oraz podać przykłady idempotentnych macierzy stopnia 3, różnych od $\mathbb{I}$. (Wskazówka: zad. 2.)

Zad.4. Podać przykłady różnych niezerowych macierzy A i B takich, że $AB=\mathbb{O}$. Wywnioskować stąd brak prawa skracania dla macierzy: nie jest ogólnie prawdą, że jeśli $AC=BC, C\neq\mathbb{O}$, to $A=B$.

Zad.5. Macierz kwadratową A nazywamy nilpotentną, jeśli dla pewnego $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, zachodzi $A^k=\mathbb{O}$. Wyznaczyć wszystkie nilpotentne macierze stopnia 2 oraz podać przykłady nilpotentnych macierzy stopnia 3, różnych od $\mathbb{O}$.

Zad.6. Dla ustalonych $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ znaleźć wszystkie macierze rzeczywiste A, takie że

$$A\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}A.$$

Zad.7. Jeżeli $A\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, to *śladem* tej macierzy nazywamy sumę elementów leżących na głównej przekątnej, tzn.

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Uzasadnić, że jeśli B i C są takie, że BC oraz CB są kwadratowe, to $\mathrm{Tr}(BC)=\mathrm{Tr}(CB)$.

Zad.8. Stosując metodę Gaussa rozwiązać układy równań:

$$\left\{\begin{array}{rcr}2x+3y+4z&=&1\\3x+4y+2z&=&2\\4x+2y+3z&=&3\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{rcr}x+y+z&=&-1\\x+2y+3z&=&1\\2x+3y+4z&=&0\\3x+2y+z&=&-5\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 4x - y + z + 2t &= 2 \\ 2x + 3y - z + t &= 0 \\ 2x - 4y + 2z + t &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z - 3t &= 2 \\ 2x + y - z + 4t &= 1 \\ 4x - y + 3z - 2t &= 5 \end{cases}$$

Romuald Lenczewski i Jacek Serafin