ALGEBRA M1 - Lista 5

Wyznaczniki, macierz odwrotna

Zad.1. Wyprowadzić wzór na wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej), tzn takiej, w której $a_{ij} = 0$ dla $i > j$ $(i < j)$.

Zad. 2. Wyprowadzić wzór na wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia n, w której zerują się wszystkie elementy za wyjątkiem $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n,1}$.

Zad.3. Korzystając z definicji, obliczyć wyznaczniki podanych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zad.4. Stosując rozwinięcia Laplace'a względem wybranych wierszy (kolumn), obliczyć wyznaczniki macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zad.5. Obliczyć wyznaczniki poniższych macierzy oraz macierzy z poprzedniego zadania, stosując operacje elementarne na wierszach (kolumnach)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad.6. Wyprowadzić wzór

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\ldots(a_n - b_n).$$

Zad. 7. Obliczyć wyznaczniki macierzy stopnia n

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & n & n & \ldots & n \\ n & 2 & n & \ldots & n \\ n & n & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \ldots & n \end{bmatrix}.$$

Zad.8. Wiedząc, że $1798 = 31 \cdot 58$, $2139 = 31 \cdot 69$, $3255 = 31 \cdot 105$, $4867 = 31 \cdot 157$, uzasadnić, że wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

jest podzielny przez 31.

Zad.9. Dowieść, że jeżeli $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest macierzą trójkątną górną (dolną), to A^{-1}, jeżeli istnieje, jest także macierzą trójkątną górną (dolną).

Zad.10. Znaleźć macierze odwrotne do podanych macierzy, metodą macierzy dołączonej oraz metodą Gaussa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Zad.11. Wyznaczyć macierze odwrotne do następujących macierzy stopnia n

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad.12. Niech $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$. Znaleźć macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$$

przy odpowiednich założeniach o macierzach A, B, C.

Romuald Lenczewski i Jacek Serafin