ALGEBRA M1 – Lista 6
Przestrzenie liniowe

Zad.1. Wykazać, że zbiór ciągów rzeczywistych (zespolonych) (a_n) z naturalnymi działaniami dodawania $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ i mnożenia przez liczby rzeczywiste (zespolone) $\alpha(a_n) = (\alpha a_n)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ (nad ciałem $\mathbb{C}$), następnie sprawdzić, które z poniższych podzbiorów tej przestrzeni są jej podprzestrzeniami:

(a) zbiór ciągów o skończonej liczbie niezerujących sie wyrazów,

(b) zbiór ciągów o skończonej liczbie zerujących się wyrazów,

(c) zbiór ciągów zbieżnych,

(d) zbiór ciągów rozbieżnych,

(e) zbiór ciągów zbieżnych do zera,

(f) zbiór ciągów rozbieżnych do nieskończoności,

(g) zbiór ciągów ograniczonych.

Zad.2. Sprawdzić, czy następujące podzbiory przestrzeni liniowej wielomianów $\mathbb{K}[x]$ są jej podprzestrzeniami, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$:

(a) zbiór wielomianów $\mathbb{K}_n[x]$ stopnia $\leq n$,

(b) zbiór wielomianów, które w punkcie $x = 1$ przyjmują wartość 1,

(c) zbiór wielomianów postaci $w(x) = a_0 + a_2x^2 + \ldots + a_{2k}x^{2k}$, gdzie $k \leq 10$,

(d) zbiór wielomianów, które mają jako pierwiastek ustaloną liczbę $a \in \mathbb{R}$.

Zad.3. Sprawdzić, czy podane podzbiory przestrzeni liniowej $V = \mathbb{R}^2$ są jej podprzestrzeniami:

(a) $W = \{(x, y) : xy = 0\}$,

(b) $W = \{(x, y) : x + 2y = 0\}$,

(c) $W = \{(x, y) : ax + by = c\}$, gdzie a, b, c – ustalone liczby rzeczywiste,

(d) $W = \{(x, y) : xy \geq 0\}$.

Zad.4. Sprawdzić, czy podane podzbiory przestrzeni liniowej $V = \mathbb{R}^4$ są jej podprzestrzeniami:

(a) $W = \{(t, t + 1, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$,

(b) $W = \{(t, s, t - s, t + s) : t, s \in \mathbb{R}\}$,

(c) $W = \{t(1, 1, 0, 0) + s(0, 0, 1, 1) + r(1, 1, 1, 1) : t, s, r \in \mathbb{R}\}$.

Zad.5. Uzasadnić, że w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ jedyne podprzestrzenie liniowe (oprócz przestrzeni zerowej oraz $\mathbb{R}^3$) to proste przechodzące przez początek układu współrzędnych oraz płaszczyzny przechodzące przez początek układu współrzędnych.

Zad.6. Niech $U, W, U_1, U_2, \ldots$ będą podprzestrzeniami tej samej przestrzeni liniowej V. Uzasadnić, że przekrój $U_1 \cap U_2 \cap \ldots$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Sprawdzić, czy podprzestrzeniami liniowymi są zbiory: $W \cup U$, $V \setminus W$.

Zad. 7. Sprawdzić liniową niezależność układów wektorów przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(1,2),(2,1)\}, \quad B = \{(1,2),(2,1),(1,0)\}.$$

Zad. 8. Zbadać liniową niezależność zbiorów wektorów z przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(1,2,0),(-2,1,1),(-1,3,1)\}, \quad B = \{(1,1,0),(1,2,0),(0,0,1)\}.$$

Zad.9. Załóżmy, że każde dwa spośród wektorów v, w, u sa liniowo niezależne. Czy wektory v, w, u muszą być liniowo niezależne?

Zad.10. Załóżmy, że wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ z przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ są liniowo niezależne. Zbadać liniową niezależność następujących wektorów:

(a) $v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$

(b) $v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1$

(c) $v_1, v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n$.

Zad.11. Zbadać liniową niezależność układów wielomianów w przestrzeni $\mathbb{R}[x]$:

$$A = \{x^4 + 1, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1\}, \quad B = \{x^3 + x^2, x^2 - 1, x^3 - x^2 - 1\}.$$

Zad.12. Wyznaczyć dowolną bazę podanych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$ lub $\mathbb{R}[x]$:

(a) $W = \{(t, t+s, 0, s) : s, t \in \mathbb{R}\}$,

(b) $W = \mathrm{Lin}((1,0,1,0),(0,1,-1,1),(1,1,0,1))$,

(c) $W = \mathrm{Lin}(1, x-1, x+1, x^2-1)$.

Zad.13. Uzupełnić do bazy zbiory wektorów

(a) $A = \{(6,-1,5),(-3,0,2)\}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$

(b) $A = \{x+1, x^2+x+1, x^3-1\}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_3[x]$.

Zad.14. Wyznaczyć wymiar podprzestrzeni przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ zadanej wzorem

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Zad.15. Załóżmy, że $\dim V = n$ w zadaniu 10. Które z podanych zbiorów wektorów tworzą bazy przestrzeni V? Wyznaczyć współrzędne wektora $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ w każdej z nich.

Zad.16. Wykazać, że jeżeli $\dim V = n$, to przestrzeń liniowa V zawiera podprzestrzenie wszystkich wymiarów $k \leq n$.

Zad.17. Określić wymiar przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_n[x]$ oraz wymiar jej podprzestrzeni złożonych z tych wielomianów, które mają pierwiastek równy a, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Zad.18. Znaleźć w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ współrzędne wektora $(3, 2, 3)$ w bazach:

$$B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}, \quad B' = \{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,1)\}.$$

Zad.19. Dane są współrzędne wektora $X \in \mathbb{R}^3$ w bazie $B = \{v_1, v_2, v_3\}$,

$$X = (2, 1, 3)_B.$$

Znaleźć współrzędne tego wektora w bazie $B' = \{v_1, 2v_1 + v_2, v_1 - v_2 + v_3\}$.

Romuald Lenczewski i Jacek Serafin