ALGEBRA M1 – Lista 7

Układy równań liniowych, rząd macierzy

Zad.1. Znaleźć rząd poniższych macierzy rzeczywistych i wyznaczyć maksymalny liniowo niezależny układ kolumn:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zad.2. Pokazać, że jeżeli macierz A ma postać

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

gdzie B, C są macierzami, natomiast zera oznaczają macierze zerowe (odpowiednich wymiarów), to

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) + \mathrm{r}(C).$$

Zad.3. Wyznaczyć rzędy poniższych macierzy w zależności od parametrów rzeczywistych p, q:

$$\begin{pmatrix} p+1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & p & 4 & 2 \\ 1 & 1 & p & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p & q & 1 & 1 \\ 1 & pq & 1 & q \\ 1 & q & p & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p-1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & p-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 2 \\ 0 & 0 & p & p+1 \end{pmatrix}.$$

Zad.4. Stosując twierdzenie Kroneckera-Capelliego, określić liczbę rozwiązań układu i liczbę parametrów, nie rozwiązując ich

$$\begin{cases} 2x+3y+4z &= 1 \\ 3x+4y+2z &= 2 \\ 4x+2y+3z &= 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z &= -1 \\ x+2y+3z &= 1 \\ 2x+3y+4z &= 2 \\ 3x+2y+z &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-y+z+2t &= 3 \\ 2x+3y-z+t &= 0 \\ 2x-4y+2z+t &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+2z-3t &= 2 \\ 2x+y-z+4t &= 1 \\ 4x-y+3z-2t &= 5 \end{cases}$$

Zad.5. Przedyskutować rozwiązalność układu w zależności od parametru λ:

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3 &= \lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3 &= \lambda^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x_1-3x_2+5x_3+7x_4 &= 1 \\ 4x_1-6x_2+\lambda x_3+3x_4 &= \lambda \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4 &= \lambda-1 \end{cases}$$

Zad.6. Rozwiązać poniższe układy równań, odgadując jedno z rozwiązań oraz rozwiązując odpowiednie układy jednorodne (znaleźć układy fundamentalne rozwiązań układów jednorodnych):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ x_1-x_2+x_3-x_4 &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1-x_2-x_3 &= -1 \\ x_1+3x_2+3x_3 &= 3 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1+2x_2-x_3-x_4 &=& -4\\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4 &=& 6\\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4 &=& -2\\ x_1+4x_2+x_3+x_4 &=& -8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} x_1-x_2-x_3 &=& 0\\ 2x_1+x_2-2x_3 &=& 3\\ x_1+2x_2-x_3 &=& 3\\ x_1+x_2+x_3 &=& 2 \end{array}\right.$$

Zad.7. Stosując wzory Cramera, rozwiązać układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+3z &=& 14\\ 4x+3y-z &=& 7\\ x-y+z &=& 2 \end{array}\right.$$

Zad.8. Wyznaczyć ilość rozwiązań układu w zależności od parametru rzeczywistego p:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+py-z &=& 1\\ x+10y-6z &=& p\\ 2x-y+pz &=& 0 \end{array}\right.$$

Zad.9. Znaleźć wszystkie macierze komutujące z (przemienne z) macierzą

$$A=\left[\begin{array}{cc} 2 & 3\\ 1 & 2 \end{array}\right].$$

Uzasadnić, że zbiór macierzy, komutujących z ustaloną macierzą B , tworzy przestrzeń liniową.

Romuald Lenczewski i Jacek Serafin