Zadania (domowe) dla uczestników Studium Talent

1. Uzasadnić, że liczby $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ oraz $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ są niewymierne.

2. Uzasadnić, że zbiory $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{Q}$ są równoliczne.

3. Uzasadnij, że zbiory $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{R}$ nie są równoliczne.

4. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że:
   (a) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, dla $n \geq 1$
   (b) $2^n \geq n^2$, dla $n \geq 4$
   (c) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, dla $n \geq 2$
   (d) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$, dla $n \geq 2$
   (e) jeśli $s_0=A$ oraz dla każdego n zachodzi $s_n=2s_{n-1}+B$, to $s_n=2^nA+(2^n-1)B$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
   (f) n^7-n dzieli się przez 7, dla $n \geq 1$
   (g*) jeśli p jest liczbą pierwszą, to n^p-n dzieli się przez p, dla $n \geq 1$.

5. Niech $L \in \mathbb{N}$ oraz $s \in \mathbb{N}$. Ile jest różnych ciągów długości L, utworzonych z elementów alfabetu o liczności s?

5'. Załóżmy, że zbiór X składa się z n elementów. Ile podzbiorów ma zbiór X?

6. Niech $x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ile rozwiązań ma równanie $x+y+z=25$? Ile rozwiązań ma to równanie, jeśli $x, y, z \in \mathbb{N}$?

7. Ile wynosi suma wyrazów w wierszu o numerze n w trójkącie Pascala, i jak wykorzystać tę informację aby wyznaczyć ilość podzbiorów zbioru liczności n?

8. Wyznaczyć pole obszaru między osią Ox, prostą $x=4$ oraz łukiem paraboli $y=x^2$, łączącym $(0,0)$ oraz $(2,4)$.

9. Wyznaczyć objętość stożka o wysokości H i promieniu podstawy R.

10. Ciąg Fibonacciego (f_n) zadajemy następująco: $f_1=f_2=1$ oraz $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ dla $n \geq 1$. Uzasadnij, że

$$f_n=\frac{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}.$$

Wskazówka: przydatne może się okazać równanie $x^2-x-1=0$.

11. Rozwiąż następujące rekurencje liniowe (podaj jawny wzór ciągu c_n):

    (a) $c_0 = 3, c_1 = 6, c_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}$ dla $n \geq 2$
    (b) $c_0 = 1, c_1 = -3, c_n = -2c_{n-1} + 3c_{n-2}$ dla $n \geq 2$
    (c) $c_0 = 1, c_1 = 2, c_n = 3c_{n-2}$ dla $n \geq 2$
    (d) $c_0 = 1, c_1 = -3, c_n = 6c_{n-1} - 9c_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

12. Znajdź rozwinięcie w ułamek łańcuchowy liczb $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ a następnie postaw sensowną hipotezę o rozwinięciach liczb postaci $\sqrt{n^2+1}, n \in \mathbb{N}$.

13. Znajdź rozwinięcie w ułamek łańcuchowy liczb $\sqrt{3}, \sqrt{8}, \sqrt{15}$ a następnie postaw sensowną hipotezę o rozwinięciach liczb postaci $\sqrt{n^2-1}, n \in \mathbb{N}$.

14. Wykonaj działania:

$$(2-i)(3+i), \quad (4+i)^2, \quad (1-i)\overline{(3+4i)}, \quad \frac{4-i}{3+i}, \quad \frac{3+4i}{1-i}, \quad i^{11}.$$

15. Naszkicować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

$$|z| \geq 3, \; |z-i| \leq 4, \; |z-i+3| = |2+3i|, \; |z-2i| \geq |z+3-i|,$$

$$\arg(z) \geq \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2} < \arg(z^3) \leq \frac{5\pi}{3}, \quad \arg(2-z) = \frac{\pi}{6}, \quad \arg(iz) = \frac{\pi}{6}.$$

16. Wyraź $\sin(6x)$ oraz $\cos(6x)$ jako sumę potęg $\sin(x)$ oraz $\cos(x)$.

17. Rozwiąż równanie i naszkicuj zbiór rozwiązań:

$$z^3 = -27, \quad z^4 = -\mathrm{i}, \quad z^6 = (3-\mathrm{i})^{12}.$$

18. Jednym z wierzchołków czworokąta (sześciokąta) foremnego o środku w punkcie $S(2,-3)$ jest $A(4,2)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki czworokąta (sześciokąta).