# Błędy studentów na egzaminach z matematyki

W opracowaniu omówiłem typowe błędy popełniane przez studentów na kolokwiach i egzaminach z algebry oraz analizy. Ponadto podaję błędy rzadziej spotykane, które zaskoczyły mnie pomysłowością zdających. Mam nadzieję, że dzięki opracowaniu studenci nie popełnią już tego rodzaju błędów.

## I. Fałszywe wzory algebraiczne, trygonometryczne i inne

Studenci błędnie przyjmują, że funkcje elementarne są liniowe i dlatego stosują wzory **a)**, **b)**.

**a)** $(a+b)^2 = a^2 + b^2, \quad \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y};$

**b)** $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$, $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y;$

**c)** $\sqrt{x^2} = x, \quad \dfrac{\ln a}{\ln b} = \ln(a-b), \quad a^n \cdot a^m = a^{n\cdot m};$

**d)** $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = \dfrac{a+b}{x+y}, \quad \dfrac{a+b}{x} = \dfrac{a}{x} + b.$

## II. Błędne metody obliczania granic ciągów i funkcji

Jednym z najczęściej popełnianych błędów przy wyznaczaniu granic ciągów i funkcji jest obliczenie granicy w dwóch etapach. Studenci najpierw przechodzą do granicy z częścią zmiennych i dopiero po uproszczeniu wyrażenia, przechodzą do granicy z pozostałymi zmiennymi.

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} (1+0)^n \,[\,\mathbf{!}\,] = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

Prawidłowy wynik $\sqrt{e}$.

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (0+0+\ldots+0)\,[\,\mathbf{!}\,] = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$ Prawidłowy wynik 1.

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2+2x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(x\sqrt{1+\dfrac{5}{x}} - x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(x\sqrt{1+0} - x\sqrt{1+0}\right)\,[\,\mathbf{!}\,] = \lim\limits_{x\to\infty} (x\cdot 1 - x\cdot 1) = \lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0.$

Prawidłowy wynik $\dfrac{3}{2}$.

**d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0+\sin x}{x}\,[\,\mathbf{!}\,]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Prawidłowy wynik 4.

**e)** $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1+8x}{x}-\dfrac{1+3x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1+0}{x}-\dfrac{1+0}{\sin x}\right)[\,\mathbf{!}\,]=$
$\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cdot 1\right)[\,\mathbf{!}\,]=\lim\limits_{x\to 0+}0=0.$

Prawidłowy wynik 5.

**f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}\right)[\,\mathbf{!}\,]=\dfrac{1}{\sin 2}\cdot 1=\dfrac{1}{\sin 2}.$

Prawidłowy wynik $\dfrac{1}{2}$.

**g)** Po podniesieniu wyrażenia za limesem do czwartej potęgi otrzymam:
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16x^4+1}}{\sqrt{x^2+3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^4+1}{(x^2+3)^2}[\,\mathbf{!}\,]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16+\frac{1}{x^4}}{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^2}=16.$

Prawidłowy wynik 2.

**h)** Dla wielu studentów wyrażenia $\infty-\infty,\ \dfrac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 1^\infty$ są tylko pozornie nieoznaczone, gdyż ich zdaniem zachodzą wzory:

$$\infty-\infty=0,\qquad \frac{\infty}{\infty}=1,\qquad 0\cdot\infty=0,\qquad 1^\infty=1.$$

Z poniższych równości wynika, że stwierdzenia te są fałszywe:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty,\ \lim_{x\to 0+}\left(\sin x\cdot\frac{2}{x}\right)=2,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

**i)** Studenci stosują regułę de L'Hospitala bez sprawdzenia założeń:
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}[\,\mathbf{!}\,]=\dfrac{1}{0+}=\infty$, prawidłowy wynik $-\infty$,
$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2^x}{x}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2^x\ln 2}{1}[\,\mathbf{!}\,]=\dfrac{1\cdot\ln 2}{1}=\ln 2$, prawidłowy wynik $\infty$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x^2}{x^2}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+2x\cos x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\cos x^2\right)$, a ponieważ ostatnia granica nie istnieje, więc nie istnieje także granica początkowa$[\,\mathbf{!}\,]$. Prawidłowy wynik 1. Ponadto stosują fałszywą "regułę de L'Hospitala" do obliczania wartości wyrażenia nieoznaczonego $0\cdot\infty$ : $\lim\limits_{x\to x_0}[p(x)\cdot q(x)]=$
$\lim\limits_{x\to x_0}[p'(x)\cdot q'(x)]$, np. $\lim\limits_{x\to 0+}(x\cdot\ \operatorname{ctg} x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(1\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}\right)[\,\mathbf{!}\,]=1\cdot\dfrac{-1}{0+}=$

$-\infty$ - poprawna wartość 1 oraz do wyrażenia $\infty-\infty$: $\lim\limits_{x\to x_0}[p(x)-q(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}[p'(x)-q'(x)]$, np. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1-\frac{1}{x}\right][\,\mathbf{!}\,]=1-0=1$ - poprawna wartość $\infty$.

**j)** Dla studentów granica $\lim\limits_{x\to\Box}\frac{\sin x}{x}$ zawsze równa się 1, niezależnie od symbolu wpisanego w ramkę. W rzeczywistości ta granica w punktach różnych od 0 ma inne wartości, np.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=0,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{\pi},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x}=\sin 1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

## III. Błędne wzory do obliczania pochodnych

**a)** $[p(x)\cdot q(x)]'=p'(x)\cdot q'(x)$,
np. $\left[x^3\sin x\right]'=\left(3x^2\right)\cdot\cos x\,[\,\mathbf{!}\,]$, poprawny wynik $3x^2\sin x+x^3\cos x$;

**b)** $\left[\frac{p(x)}{q(x)}\right]'=\frac{p'(x)}{q'(x)}$,
np. $\left[\frac{\cos x}{e^x}\right]'=\frac{-\sin x}{e^x}\,[\,\mathbf{!}\,]$, poprawny wynik $-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$,

**c)** $\left[\frac{1}{q(x)}\right]'=\frac{1}{q'(x)}$,
np. $\left[\frac{1}{x^4-x}\right]'=\frac{1}{4x^3-1}\,[\,\mathbf{!}\,]$, poprawny wynik $-\frac{4x^3-1}{\left(x^4-x\right)^2}$,

**d)** $\{f[g(x)]\}'=f'[g'(x)]$,
np. $[\sin(\ln x)]'=\cos\left(\frac{1}{x}\right)[\,\mathbf{!}\,]$, poprawny wynik $\frac{1}{x}\cos(\ln x)$;

**e)** $(9^x)'=x\cdot 9^{x-1}$, $\quad(\arcsin x)'=\arccos x$, $\quad(\mathrm{tg}\ x)'=\mathrm{ctg}\ x$;

**f)** $(x^x)'=x^x\cdot\ln x$, $\quad\left(e^7\right)'=e^7$, $\quad(\ln 44)'=\frac{1}{44}$, $\quad\left(\pi^5\right)'=5\pi^4$;

**g)** $(\mathrm{arc\ tg}\ x)'=\frac{1}{1+x^2}\cdot(\mathrm{tg}\ x)'=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad\left[|x|^3\right]'=3|x|^2$.

**h)** Studenci potrafią różniczkować nie istniejące funkcje, np. :

$$\left[\sqrt{\cos x-3}\right]'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x-3}}\,[\,\mathbf{!}\,];$$

$$\left[\arcsin\left(2+x^2\right)\right]' = \frac{2x}{\sqrt{1-\left(2+x^2\right)^2}}\,[\,\mathbf{!}\,];$$

$$\left[\ln\left(1-e^{x^2}\right)\right]' = \frac{1}{1-e^{x^2}}\cdot\left(-e^{x^2}\right)\cdot(2x)\,[\,\mathbf{!}\,].$$

**i)** Zadanie: dla $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$ zbadać, czy istnieje $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Rozwiązanie studenta: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left[\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+y^4}}\right]_{(0,0)} = \dfrac{0}{0}$. Otrzymałem wyrażenie nieoznaczone, więc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ nie istnieje $[\,\mathbf{!}\,]$. Odp. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

## IV. Błędne sposoby obliczania całek nieoznaczonych

**a)** $\displaystyle\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx$,

np. $\displaystyle\int x\cos x dx = \frac{x^2}{2}\sin x + C$, poprawny wynik $\cos x + x\sin x + C$;

**b)** $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$,

np. $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}dx = \frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x} + C\,[\,\mathbf{!}\,]$, poprawny wynik $\displaystyle -\frac{(x+1)}{e^x}+C$;

**c)** $\displaystyle\int p^n(x)\,dx = \frac{p^{n+1}(x)}{n+1}+C \quad (n\in\mathbb{N})$,

np. $\displaystyle\int \cos^3 x dx = \frac{\cos^4 x}{4}+C\,[\,\mathbf{!}\,]$, poprawny wynik $\displaystyle x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$;

**d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{p(x)} = \ln|p(x)|+C$,

np. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} = \ln|e^x+1|+C\,[\,\mathbf{!}\,]$, poprawny wynik $x-\ln(e^x+1)+C$;

**e)** $\displaystyle\int e^{p(x)}dx = e^{p(x)}+C$,

np. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx = e^{\sqrt{x}}+C\,[\,\mathbf{!}\,]$, poprawny wynik $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}+C$;

**f)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+p^2(x)} = \operatorname{arctg} p(x)+C$, np. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C\,[\,\mathbf{!}\,]$, poprawny wynik $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$.

## V. Jeżeli student może utrudnić sobie życie, to tak zrobi

**a)** Rozwiązać równanie $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$. Metoda studenta: po wymnożeniu czynników po lewej stronie równania otrzymam

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0\,[\,\mathbf{!}\,].$$

**b)** Rozwiązać nierówność $\dfrac{(x-2)(x+4)}{(x+1)(x-3)} < 0$. Rozwiązanie studenta: po wyznaczeniu iloczynów w liczniku i mianowniku otrzymam nierówność

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x-3} < 0\,[\,\mathbf{!}\,].$$

**c)** Obliczyć $\left[\left(x^2+3\right)^4\right]'$. Rozwiązanie studenta: po obliczeniu potęgi otrzymam $\left[\left(x^2+3\right)^4\right]' = \left(x^8 + 12x^6 + 54x^4 + 108x^2 + 81\right)'\,[\,\mathbf{!}\,]$.

**d)** Obliczyć $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^3}$. Rozwiązanie studenta: po podniesieniu mianownika do sześcianu dostanę $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \int \frac{dx}{x^3-6x^2+12x-8}\,[\,\mathbf{!}\,]$.

**e)** Wyznaczyć $\sqrt[4]{(3-2i)^4}$. Rozwiązanie studenta: po obliczeniu czwartej potęgi otrzymam $\sqrt[4]{(3-2i)^4} = \sqrt[4]{-119-120i}\,[\,\mathbf{!}\,]$.

**f)** Obliczyć $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\right)$. Rozwiązanie studenta: po wyznaczeniu macierzy odwrotnej otrzymam

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}[\,\mathbf{!}\,]\right) = 1.$$

**g)** Obliczyć $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{5}\right)$. Rozwiązanie studenta: po obliczeniu piątej potęgi macierzy otrzymam

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^5\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 362 & 627 \\ 209 & 362 \end{bmatrix} [\,!\,]\right) = 1.$$

**h)** Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $(z+2i)^6 + (z-1)^6 = 0$. Rozwiązanie studenta: po wykonaniu działań otrzymam równanie równoważne

$$2z^6 - (6-12i)\,z^5 - 45z^4 - (20+160i)\,z^3 + 255z^2 - (6-192i)\,z - 63 = 0\,[\,!\,]\,.$$

**i)** Student napisał: po obliczeniu silni otrzymam:

$$\frac{8!}{10!} = \frac{40\,320}{3628\,800}\,[\,!\,] = \frac{1}{90}.$$

## VI. Błędne definicje, fałszywe twierdzenia, ciekawe sformułowania, dziwne rozumowania oraz zaskakujące wnioski

**a)** Fragment rozwiązania zadania z rachunku prawdopodobieństwa o występowaniu daltonizmu wśród mężczyzn i kobiet: wyznaczę liczbę mężczyzn, którzy **nie rozróżniają** kobiet.

**b)** Ponieważ cały okrąg ma równanie $x^2+y^2=r^2$, więc jego dolna połowa jest opisana wzorem $-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)=r^2$ , a górna wzorem $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)=r^2$.

**c)** Jeżeli twierdzenie $T_n$ określone dla $n$ liczb naturalnych jest prawdziwe dla $n+1$ liczb i zachodzi implikacja $T_n \Longrightarrow T_{n+1}$, to mamy do czynienia z zasadą indukcji matematycznej.

**d)** Granica $\lim_{x\to 0} f(x)$ nie istnieje. Zatem w punkcie $x=0$ funkcja $f$ nie może być już nigdy ciągła **i dobrze jej tak!**

**e)** Ciąg $(-1)^n$ raz dąży do $+\infty$, a raz do $-\infty$, wobec tego zachodzi stosunek $\frac{+\infty}{-\infty}$.

**f)** Mógłbym policzyć pochodną, ale nie każą.

**g)** Funkcja $f$ jest monotoniczna w przedziale $(a,b)$, gdy wszystkie punkty z tego przedziału dają się połączyć prostą lub krzywą.

**h)** Bez linijki i gumki nie potrafię narysować wykresu tej funkcji.

**i)** Monotoniczność funkcji $f$ określę na podstawie znaku różnicy

$$f\,(x+1) - f\,(x)\,.$$

**j)** Z powodu braku czasu dalszą część rozwiązania przeprowadzę w formie kontemplacji.

**k)** Granica ciągu jest to ostatnia liczba ze zbioru liczb należących do tego ciągu.

**l)** Zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, bo logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów.

**m)** Po pomnożeniu obu stron równania przez $x$ otrzymam:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=1 \iff \frac{1}{\sin}+\frac{1}{\cos}=x.$$

**n)** Prawdziwa jest równoważność $\operatorname{tg} x<1 \iff x<\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

**o)** Nierówność wykładnicza jest różniczkowalna, więc możemy opuścić podstawy.

**p)** Po podzieleniu obu stron równania $\operatorname{ctg} x=3\operatorname{tg} x$ przez $\operatorname{tg} x$ otrzymamy, że stała $c$ równa się 3.

**q)** Dla każdego $x>0$ funkcje $f,g,h$ spełniają nierówności
$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$, ale $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to\infty}h(x)$.
Zatem granica $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ nie istnieje.

**r)** Zakładam, że tożsamość jest prawdziwa dla każdego $n=1$.

**s)** Zadanie rozwiążę metodą spekulacji.

**t)** Wyobraźmy sobie sześcian, który ma sześć tysięcy ścian.

**u)** Granicą ciągu nazywamy wartość, jaką osiąga funkcja przy dążeniu do końca przedziału.

**v)** Z niemożliwości matematycznego rozwiązania posłużyłam się logiką.

**w)** Niech zdarzenie $A$ oznacza, że czerwony tramwaj jedzie z prawej strony. Wtedy zdarzenie przeciwne do $A$ oznacza, że niebieski tramwaj jedzie z przeciwnej strony.

**x)** Prawie wszystkie oznacza wszystkie, oprócz tych co nie należą.

**y)** W ten sposób pokazałem rodzicom, że nie nadaję się na studia.

**z)** Zachodzi tutaj zjawisko indukcji matematycznej.

**A)** Sam się dziwię, jak zdałem maturę.

**B)** Istnieje twierdzenie, niepotrzebne w zadaniu, które brzmi ... .

**C)** Prawdopodobieństwo zdarzenia wynosi $1000!\cdot 999!\cdot 998!\cdot\ldots\cdot 1!$.

**D)** Rozumowania w rozwiązaniach zadania dotyczącego wieku trzech braci. „W celu skorzystania z ostatniej informacji w zadaniu dodatkowo wprowadzam czwartego brata". Inny zadający otrzymał ujemny wiek braci, jednak nie stracił głowy i napisał: „Najstarszy brat urodzi się za 6 lat, średni za 9 lat, a najmłodszy za 12 lat".

**E)** Układ równań jest nie do rozwiązania.

**F)** Pochodną nazywamy granicę okresów ilorazowych.

**G)** W trójkącie jeden kąt ma $135^0$, drugi ma także $135^0$, a trzeci - $90^0$. Ponieważ suma kątów w tym trójkącie równa się $360^0$, więc taki trójkąt nie istnieje.

**H)** Gołym okiem widać, że funkcja $f(x) = \sqrt{2x-1}$ jest ściśle rosnąca.

**I)** Zadanie jest tak proste, że nie ma co rozwiązywać.

**J)** Oczywiście w praktyce wybiera się dużo mniejsze $\varepsilon$ niż na rysunku.

**K)** Zakładamy, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej $n$. Pokażemy, że jest ona prawdziwa także dla liczby $n+1$.

**L)** Proste $l_1$ i $l_2$ są prostopadłe, gdy są w stosunku.

Z prac egzaminacyjnych wybrał: *Zbigniew Skoczylas*