Zadanie 1. Niech $X_t := 2^{B_t}, Y_t := \operatorname{arc\,tg}(X_t), Z_t \colon \mathrm{d}Z_t = \mathrm{d}B_t + t\mathrm{d}Y_t$. Oblicz $\mathrm{d}\langle X+Y, Z\rangle_t$.

Potrzebujemy znać współczynniki σ odpowiednich procesów i przemnożyć je przez siebie. Co stoi przy $\mathrm{d}t$ nie jest ważne.

$$\mathrm{d}X_t = \ln 2 \cdot 2^{B_t}\mathrm{d}B_t + (\ldots)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}Y_t = \frac{1}{1+X_t^2}\mathrm{d}X_t + (\ldots)\mathrm{d}t = \frac{\ln 2 \cdot 2^{B_t}}{1+4^{B_t}}\mathrm{d}B_t + (\ldots)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}(X_t+Y_t) = \left(\ln 2 \cdot 2^{B_t} + \frac{\ln 2 \cdot 2^{B_t}}{1+4^{B_t}}\right)\mathrm{d}B_t + (\ldots)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}Zt = \left(1 + t\frac{\ln 2 \cdot 2^{B_t}}{1+4^{B_t}}\right)\mathrm{d}B_t + (\ldots)\mathrm{d}t$$

Mnożąc

$$\mathrm{d}\langle X+Y, Z\rangle_t = \left(\ln 2 \cdot 2^{B_t} + \frac{\ln 2 \cdot 2^{B_t}}{1+4^{B_t}}\right)\left(1 + t\frac{\ln 2 \cdot 2^{B_t}}{1+4^{B_t}}\right)\mathrm{d}t.$$

Zadanie 2. Oblicz pierwszy i drugi moment procesu zadanego całką Stratonowicza

$$X_t := \int_0^t (B_s - 1)^2 \circ \mathrm{d}B_s.$$

Czy proces ten jest martyngałem i dlaczego?

Przerabiamy na całkę Itō

$$X_t = \int_0^t (B_s-1)^2\mathrm{d}B_s + \int_0^t (B_s-1)\mathrm{d}s.$$

Średnia z pierwszej całki jest równa 0, więc

$$\mathbb{E}[X_t] = \int_0^t \mathbb{E}[B_s - 1]\mathrm{d}s = -t.$$

$\mathbb{E}[X_t] \neq \mathrm{const}$, czyli to nie martyngał. Wariancję można policzyć z izometrii Itō

$$\operatorname{var} X_t = \int_0^t \mathbb{E}[(B_s-1)^4]\mathrm{d}s = \int_0^t \mathbb{E}[B_s^4 - 4B_s^3 + 6B_s^2 - 4B_s + 1]\mathrm{d}s = \int_0^t (3s^2+6s+1)\mathrm{d}s = t^3 + 3t^2 + t.$$

Drugi moment to

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \operatorname{var} X_t^2 + \mathbb{E}[X_t]^2 = t^3 + 4t^2 + t.$$

Zadanie 3. Rozwiąż stochastyczne równanie różniczkowe na odcinku $[0, \pi/2)$.

$$\mathrm{d}X_t = \frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 1.$$

Wynik wyraź jako całkę po po przyrostach brownowskich ze znanej funkcji (kombinacji funkcji elementarnych).

Ponieważ jestem nieprzytomny i nie zauważyłem braku X_t w wyrażeniu $\frac{1}{\cos t}X_t\mathrm{d}t$ rozwiązanie zadania nieintencjonalnie jest trywialne, wystarczy nałożyć całkę

$$X_t = 1 + \int_0^t \frac{1}{\cos s}\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{d}B_s = 1 + \int_0^t \frac{1}{\cos s}\mathrm{d}s + B_t.$$

W całce po przyrostach $\mathrm{d}B_s$ widnieje 1 niewątpliwe będącce kombinacją funkcji elementarnych, więc napisanie powyższego daje 4 pkt.

W przypadku zamierzonej treści zadania trzeba by przeliczyć do końca czynnik całkujący $\exp\left(\int_0^t \frac{1}{\cos s}\mathrm{d}s\right)$. Da się tę całkę obliczyć np. podstawieniem $\sin s = w$.

Zadanie 4. Rozwiąż układ stochastycznych równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= -2X_t\mathrm{d}t - 2Y_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t^1\\ \mathrm{d}Y_t &= -Y_t\mathrm{d}t - 2\mathrm{d}B_t^2,\end{aligned}$$

gdzie $[B^1, B^2]$ to dwuwymiarowy ruch Browna. Odpowiedz na pytanie, co się dzieje z rozkładem wektora (X_t, Y_t) dla $t \to \infty$. Czy:

a) Rozkład jest rozbieżny.

b) Rozkład zbiega do niezerowej granicy.

c) Rozkład zbiega do zera.

Odpowiedź uzasadnij.

Są 2 sposoby na rozwiązanie. Pierwszy to rozwiązanie równania na Y_t przez czynnik całkujący e^t, wstawienie rozwiązania w równanie na X_t i wycałkowanie go czynnikiem całkującym e^{2t}. Pojawią się całki podwójne, więc jest to nieco irytujące.

Drugi sposób to użycie eksponenty macierzowej z $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Wartości własne to -2 oraz -1, wektory własne to $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{At} = P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie to

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{At} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} \begin{bmatrix} B_s^1 \\ -2B_s^2 \end{bmatrix}.$$

Dla $t \to \infty$ zachodzi $\mathrm{e}^{At} \to 0$ wykładniczo. Warunek początkowy więc zanika. Co do całki po ruchu Browna, to można zauważyć, że podstawiając $w = t - s$ i zauważając, że $\mathrm{d}B_{t-w}$ to również pewien biały szum brownowski $\mathrm{d}\tilde{B}_w$.

$$\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} \begin{bmatrix} B_t^1 \\ -2B_t^2 \end{bmatrix} = \int_0^t \mathrm{e}^{Aw} \begin{bmatrix} \tilde{B}_w^1 \\ -2\tilde{B}_w^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{t\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{Aw} \begin{bmatrix} \mathrm{d}\tilde{B}_w^1 \\ -2\mathrm{d}\tilde{B}_w^2 \end{bmatrix}.$$

Całka ta jest zbieżna, rozkład zbiega do niezerowej wartości. (Konkretnie jest to rozkład normalny o średniej zero i wariancji do przeliczenia z izometrii Itō.)