Przykładowe rozwiązania

Zadanie 1. Rozważmy ciąg zdarzeń opisywanych procesem Poissona. Oblicz szansę sytuacji, w której wystąpi jedno zdarzenie między czasami 2 a 4 oraz dwa zdarzenia między czasami 3 a 5.

Szukane zdarzenie to $A := N_4 - N_2 = 1 \wedge N_5 - N_3 = 2$. Zdarzenia te są zależne, podzielmy je więc na niezależne części

$$\Delta N_1 := N_3 - N_2, \quad \Delta N_2 := N_3 - N_2, \quad \Delta N_3 = N_5 - N_4.$$

Przy tych oznaczeniach

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\Delta N_1 + \Delta N_2 = 1 \wedge \Delta N_2 + \Delta N_3 = 2).$$

Pod zdarzeniem A są tylko 2 rozłączne opcje: $\Delta N_2 = 0$ lub $\Delta N_2 = 1$.

$$A = (\Delta N_1 = 1 \wedge \Delta N_2 = 0 \wedge \Delta N_3 = 2) \veebar (\Delta N_1 = 0 \wedge \Delta N_2 = 1 \wedge \Delta N_3 = 1).$$

To jest już rozbicie na niezależne zdarzenia, których prawdopodbieństwa znamy $\mathrm{P}(\mathcal{P}oiss(\lambda) = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\mathcal{P}oiss(\lambda) = 1)\,\mathrm{P}(\mathcal{P}oiss(\lambda) = 0)\,\mathrm{P}(\mathcal{P}oiss(\lambda) = 2) + \mathrm{P}(\mathcal{P}oiss(\lambda) = 0)\,\mathrm{P}(\mathcal{P}oiss(\lambda) = 1)\,\mathrm{P}(\mathcal{P}oiss(\lambda) = 1)$$

$$\mathrm{P}(A) = \lambda^2\,(1 + \lambda/2)\,\mathrm{e}^{-3\lambda}$$

Zadanie 2. Tzw. *proces śmierci* jest zadany jako

$$X_t := \begin{cases} 1, & t < T \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

gdzie T jest zmienną losową z rozkładu wykładniczego. Jest to jednorodny proces Markowa. Oblicz jego generator.

Przestrzeń ma tylko 2 stany 0 i 1. Proces kiedy po dojściu do 0 zostaje już w nim zawsze, więc $\mathcal{A}f(0) = 0$. Natomiast

$$\mathcal{A}f(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}_1[f(X_h)] - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{P}(X_h = 1)f(1) + \mathrm{P}(X_h = 0)f(0) - f(1)}{h}.$$

Ponieważ $\mathrm{P}(X_h = 1) = \mathrm{P}(T > h) = \mathrm{e}^{-\lambda h}$ obliczamy

$$\mathcal{A}f(1) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda h} - 1}{h} f(1) + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda h}}{h} f(0) \right) = -\lambda f(1) + \lambda f(0).$$

Zadanie 3. Niech B^1 oraz B^2 to dwa niezależne ruchy Browna. Definiujemy proces X jako

$$X_t := \begin{cases} B_t^1, & t \leq T; \\ B_t^2 - B_T^2 + B_T^1, & t > T, \end{cases}$$

gdzie $T > 0$ jest pewną deterministyczną liczbą. Sprawdź, czy:

a) Proces X jest ruchem Browna.

Tak. Dla $t \leq T$ to ruch Browna z definicji. Proces $B_t^2 - B_T^2$ to ruch Browna startujący w chwili T. Tak więc po chwili T proces X to niezależny ruch Browna startujący z $X_T = B_T^1$. Jest to więc proces markowski, którego przyrosty w każdej chwili są takie same jak ruchu Browna. To ruch Browna.

b) Proces X jest martyngałem (względem filtracji naturalnej).

Tak. Bo to ruch Browna.

c) Proces X jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}^{B^1}$ procesu B^1.

Nie. Dla $T < s < t$ mamy $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s^{B^1}] = \mathbb{E}[B_t^2 - B_T^2 + B_T^1|\mathcal{F}_s^{B^1}] = 0 - 0 + B_T^1 \neq X_s$

d) Proces X jest martyngałem względem filtracji łącznej $\mathcal{F}^{B^1,B^2}$ procesów B^1 i B^2.

Tak. Intuicyjny argument jest taki: warunując po $\mathcal{F}^{B^1,B^2}$ do T warunkujemy B^1 po filtracji B^1, dodanie warunkowania po niezależnym B^2 nic nie zmienia. Po T warunkujemy przyrosty B^2 po filtracji B^2, dodanie warunkowania po niezależnym B^1 nic nie zmienia.

Bardziej ściśle: proces jest całkowalny bo to ruch Browna. Filtracja $\mathcal{F}^{B^1,B^2}$ jest silniejsza niż $\mathcal{F}^X$, oznacza to, że $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_t^{B^1,B^2}] = X_t$. Dodatkowo, ponieważ B^1 oraz B^2 są niezależne, a przyrosty X są niezależne - zależnie od przedziału - od przeszłości B^1 lub od B^2, są one również niezależne zarówno od $B_s^1, s \leq t$ jak i $B_s^2, s \leq t$ a więc od $\mathcal{F}^{B^1,B^2}$.

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s^{B^1,B^2}] = \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_s^{B^1,B^2}] + \mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s^{B^1,B^2}].$$

Pierwsza z wartości po prawej jak uzasadniono wyżej to X_s, a druga z niezależności to średnia $\mathcal{N}(0, t-s)$, czyli 0.

Zadanie 4. Niech Z_i to iid zmienne $\mathcal{N}(0,1)$. Zdefiniujmy

$$X_n := \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} Z_k.$$

a) Oblicz jego gęstość prawdopodobieństwa w chwili n.

Mamy $\mathbb{E}[X_n] = 0$ oraz z iid Z_k

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Proces jest gaussowski (patrz pkt b), więc w szczególności $X_n \sim \mathcal{N}(0, n(n+1)/2)$ i

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n(n+1)}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n(n+1)}}.$$

b) Sprawdź, czy jest to proces gaussowski.

Tak, ponieważ każda jego wartość X_n jest liniową kombinacją wartości z gaussowskiego ciagu Z.