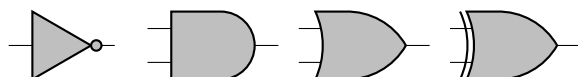


# Matematyka dyskretna, WMat 2024

## Lista 0: Operacje bitowe

Notacja:

- ▶ Możliwe wartości bitu oznaczamy 0 oraz 1, co interpretujemy logicznie jako fałsz/prawdę.
- ▶ Symbole  $\&$ ,  $|$ ,  $\wedge$ ,  $\sim$  to odpowiednio logiczne operacje: i, lub, albo, nie. Możemy je stosować do bitów lub sekwencji bitów, w tym drugim przypadku są stosowane równoległe do bitów na tych samych pozycjach, np.  $110 \& 010$  daje  $1\&0 \ 1\&1 \ 0\&1 = 010$ .
- ▶ Operacja przesunięcia bitowego  $x \ll n$  przesuwa bity z sekwencji  $x$  o  $n$  pozycji w lewo,  $n$  bitów najbardziej z lewej znika, z prawej jest dopisanych  $n$  bitów 0. Operator  $\gg$  analogicznie przesuwa bity w prawo.
- ▶ Bity i ciągi bitów interpretujemy też jako liczby naturalne zapisane w systemie dwójkowym wraz z arytmetyką modulo  $2^n$ , np.  $1011 = 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 2^1 + 2^0 = 11$ ,  $10 + 01 = 11$ ,  $10 + 10 = 00$ ,  $011 * 010 = 110$ .
- ▶ Bramki logiczne, kolejno: nie, i, lub, albo.



1. Znaki UTF-8 są kodowane za pomocą 1, 2, 3 lub 4 bajtów. Mogą przyjmować jedną z 4 możliwych postaci ( $b$ -dowolny bit):

- (a)  $0b\text{bbbbbb}$
- (b)  $110b\text{bbbb} \ 10b\text{bbbbbb}$
- (c)  $1110b\text{bbb} \ 10b\text{bbbbbb} \ 10b\text{bbbbbb}$
- (d)  $11110b\text{bb} \ 10b\text{bbbbbb} \ 10b\text{bbbbbb} \ 10b\text{bbbbbb}$

Ile jest możliwych znaków UTF-8?

2. Które z tych operatorów jest identycznych w działaniu na pojedynczym bicie:  $+$ ,  $*$ ,  $\min$ ,  $\max$ ,  $\&$ ,  $|$ ,  $\wedge$ ?

3. Niech dana będzie sekwencja bitów  $x$  o długości  $n$ .

- (a) Jakiej operacji arytmetycznej odpowiada  $\sim x$ ?
- (b) Dla  $x > y$  jak obliczyć  $x - y$  mając do dyspozycji jedynie operatory logiczne oraz  $+$ ?

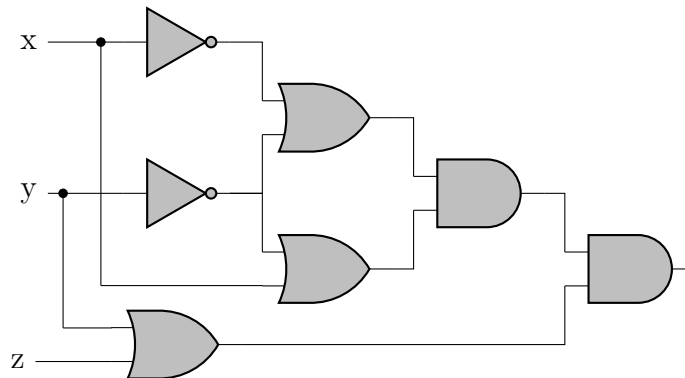
4. Dla dla liczby  $x$  zapisanej bitowo napisz jak najprostszy algorytm obliczania  $24 * x$  mając do dyspozycji jedynie operacje  $\ll$ ,  $+$  oraz liczbę 1. Czy potrafisz podać przy tych samych założeniach również ogólny algorytm/wzór obliczania  $x * y$ ?

5. Mając dany bajt jak obliczyć sumę jego bitów mając do dyspozycji bitowe operacje logiczne oraz bajty z dowolną wcześniej ustaloną zawartością?

6. Wyjaśnij, co (w relacji do  $x$ ) zwracają operacje:

- ▶  $x \& (1 \ll k)$
- ▶  $x \mid \sim(1 \ll k)$
- ▶  $x \gg 7$  gdy  $x$  to bajt
- ▶  $x \& (x - 1)$

7. Napisz wzorem działanie obwodu logicznego



Uprość powstałe wyrażenie/obwód.

8. Narysuj obwód, który wykonuje  $(x \hat{=} y) \mid (y \hat{=} z) \mid (z \hat{=} x)$ . Co to za operacja?

9. Zaprojektuj obwody, który wykonują operacje:

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0