Matematyka dyskretna, WMat 2024

Lista 2: Rozszerzenia pojęcia entropii

1. Oblicz entropię zmiennej, która z szansą 1/3 jest cyfrą, 1/3 małą literą alfabetu ASCII, a z 1/3 myślnikiem „-”. W przypadku wybrania cyfry, każda z nich ma równą szansę, podobnie z literami.

2. Niech zmienna 2-symbolowa XY ma rozkład zadany tablą

$Y\backslash X$	a	b	c	d
a	1/8	1/16	1/32	1/32
b	1/16	1/8	1/32	1/32
c	1/16	1/16	1/16	1/16
d	1/4			

Oblicz entropie łączną, entropie warunkowe oraz informację wzajemną.

3. Niech X ma rozkład p na alfabecie $\mathcal{A}_X$, a Y rozkład q na alfabecie $\mathcal{A}_Y$. Alfabety $\mathcal{A}_X$ oraz $\mathcal{A}_Y$ nie zawierają wspólnych znaków. Definiujemy Z jako z prawdopodobieństwem α równe X, w pozostałych przypadkach równe Y.

(a) Wyraź entropię Z za pomocą entropii X oraz Y.

(b) Oblicz entropię warunkową oraz informację wzajemną $H(Z|X), I(Z;X)$.

4. Rzucamy kością sześcienną. Jaka jest informacja wzajemna między:

(a) Liczbą na jej górnej ściance a jej dolnej ściance?

(b) Liczbą na jej górnej ściance, a jej frontowej ściance (tej skierowanej najbardziej w stronę rzucającego?).

(c) Liczbą na górnej ściance, a sumą liczb na wszystkich bocznych ściankach?

5. Rozpatrzmy słowa 3-bitowe XYZ, gdzie rozkład X to $[p, 1-p]$, rozkład Y to $[q, 1-q]$ a $Z := X + Y \mod 2$.

(a) Jaki jest rozkład Z oraz $I(Z;X)$?

(b) Narysuj diagram Venna entropii składowych XYZ. Dla $p = q = 1/2$ oblicz „informację” znajdującą się na wszystkich kawałkach przekroi. Czy wszędzie jest nieujemna?

6. Oblicz entropię względną $D(P\|Q)$ rozkładów $P = [p, 1-p]$ oraz $Q = [q, 1-q]$

7. Podaj przykłady 2 takich rozkładów, że $D(p\|q) = D(q\|p)$ ale $p \neq q$.

8. Niech dane będą niezależne zmienne A, B, C o entropiach, które uznajemy za dane. Oznaczmy $X := [A, B], Y := [B, C]$. Ile są równe $H(X, Y), H(X|Y), I(X;Y)$?

9. Pokaż, że jeżeli $H(Y|X) = 0$, to Y musi być funkcją X.

10. Niech X o rozkładzie $p_k = p(x_k)$ będzie losowym symbolem, a Q o rozkładzie $r_k = r(x_k)$ zestawem losowo wybieranych pytań. Mając obserwację x zajemy pytanie q wybierane niezależnie od X, uzyskując deterministyczną odpowiedź $A(x, q)$.

(a) Pokaż, że $I(X; Q, A) = H(A|Q)$. Jak należy to rozumieć?

(b) Załóż, że zadajemy 2 niezależne pytania Q_1, Q_2 o rozkładzie r_k. Pokaż, że zadając takie 2 pytania nie uzyskujemy 2-krotnie większej informacji w sensie

$$I(X; Q_1, A_1, Q_2, A_2) \leq 2I(X; Q_1, A_1).$$

11. Udowodnij nierówności

(a) $\sqrt[\alpha]{\frac{|x_1|^\alpha + \ldots + |x_n|^\alpha}{n}} \geq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ dla $\alpha \geq 1$,

(b) $x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} \leq p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$ dla rozkładu $[p_1, \ldots, p_n]$ oraz nieujemnych x_k

12. Pokaż, że dla ustalonego alfabetu $\mathcal{A}$ maksymalna możliwa entropia to $\log |\mathcal{A}|$. Jaki rozkład ją maksymalizuje?