Matematyka dyskretna, WMat 2024

Lista 4: Kanały komunikacyjne

1. Niech dany będzie binarny symetryczny kanał o prawdopodobieństwie błędu 0.1. Jeżeli na wejściu obserwujemy sygnał $\mathrm{P}(X = \mathtt{0}) = 0.95, \mathrm{P}(X = \mathtt{1}) = 0.05$, to jakie są prawdopodobieństwa *a posteriori* $p(x|y)$?

2. Niech dany będzie kanał Z o prawdopobieństwie błędu 0.15. Oblicz prawdopodobieństwa *a posteriori* $p(x|y)$ przy rozkładzie $\mathrm{P}(X = \mathtt{0}) = 0.95, \mathrm{P}(X = \mathtt{1}) = 0.05$. W jakiej sytuacji możemy być pewni wartości X?

3. Czy dla danego kanału można zwiększyć jego pojemność przekształcając dodatkowo wyjście $\widetilde{Y} = f(Y)$?

4. Niech dany będzie kanał o znanej pojemności C Jaka jest pojemność tego kanału z dołączoną nową „linią”, na której dodatkowy symbol $X = \xi$ jest przekształcany deterministycznie na dodatkowe wyjście $Y = f(\xi)$?

5. Rozważ kanał, który dwójki bitów X_1X_2 przetwarza na dwójki bitów Y_1Y_2 według reguły $\mathtt{00} \to \mathtt{01}$, $\mathtt{01} \to \mathtt{10}$, $\mathtt{10} \to \mathtt{11}$, $\mathtt{11} \to \mathtt{00}$. Oblicz

   a) Informację wzajemną $I(X_1X_2; Y_1Y_2)$ jako funkcję rozkładu X_1X_2 oraz pojemność kanału.

   b) Informację wzajemną $I(X_1; Y_1)$ pierwszych bitów dla rozkładu maksymalizującego a) oraz dla $p_X(\mathtt{00}) = p_X(\mathtt{01}) = p_X(\mathtt{10}) = 1/3, p_X(\mathtt{11}) = 0$.

6. Niech kanał Z ma prawdopodobieństwo błędu 0.5. Wyraź jego informację wzajemną jako wyrażenie zależne od rozkładu X $p_X = [p, 1 - p]$. Znajdź maksimum tej funkcji i pojemność tego kanału.

* Rozwiąż przypadek ogólny, gdzie prawdopodobieństwo błędu to q.

7. Oblicz pojemności kanałów 3-stanowych z

   a) $p(y|x) = 1/3$ dla wszystkich x, y,

   b)

$$p(y|x) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

8. Niech kanał przetwarza X mającego m symboli na Y mającego m symboli w 2 etapach. W pierwszym przekształca $Y \to V$, z $p(v|x)$ gdzie V ma k symboli, po czym przekształca $V \to Y$ z $p(y|v)$. Tak więc $p(y|x) = \sum_v p(y|v)p(v|x)$. Pokaż, że jego pojemność jest ograniczona z góry przez $C \leq \log k$.