Matematyka dyskretna, WMat 2024

Lista 5: Wstęp do rekursji

1. Napisz w postaci indukcji matematycznej operację wyrażoną kodem programistycznym

```
a = 1
S = 0
for k in 1:n
    S += a
    a *= q
end
```

Co ona oblicza? Ile mnożeń oraz dodawań wykonuje?

2. Wykaż, że jeżeli dla ustalonego x_0 orbita funkcji ciągłej f ma granicę x_∞, to musi ona spełniać $x_\infty = f(x_\infty)$.

3. Oblicz kilka pierwszych wyrazów ciągu rekurencyjnego zadanego regułą $r_k = r_{k-1} + 2k + 1, r_1 = 1$. Na tej podstawie zaproponuj wzór na r_k i udowodnij go indukcyjnie. Ile dodawań oraz ile mnożeń trzeba wykonać, aby zgodnie z regułą rekurencyjną obliczyć r_k?

4. Niech a_k to ustalone liczby. Udowodnij wzory na k-te wyrazy ciągów:

a) $r_k = a_k + r_{k-1}, \quad r_0 = 0$

b) $r_k = a_k r_{k-1}, \quad r_0 = 1$

5. Rozwiąż równania rekurencyjne

a) $r_k = (r_{k-1})^2, \quad r_1 = 2,$

b) $r_k = r_{k-1} r_{k-2}, \quad r_1 = 2, r_2 = 2.$

6. Model Verhulsta jest najprostszym opisem populacji, która rozwija się w środowisku o skończonych zasobach. Niech r_k będzie populacją w pokoleniu k, którą mierzymy tak, że $r = 1$ odpowiada populacji w 100% zużywającej ograniczone zasoby. W modelu tym populacja spełnia równanie rekurenycjne $r_k = a r_{k-1}(1 - r_{k-1})$. Pokaż, że dla $a < 0$ populacja startująca z $0 < r_0 < 1$ nigdy nie będzie całkowicie zużywać zasobów.

7. Rozpatrzmy n różnych symboli. Ile różnych k-wyrazowych słów ($k < n$) możemy z nich ułożyć?

8. Rozpatrzmy n symboli, z których jeden, i tylko jeden, powtarza się dwukrotnie, np $(\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d})$ Ile różnych n-wyrazowych słów można z nich ułożyć?

* Uogólnij wynik do przypadku, kiedy każdy symbol s_i powtarza się $l_i \geq 1$ razy.

9. Udowodnij, że dla ciągu Fibonacciego

a) $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$

b) $\sum_{i=1}^{k} F_i^2 = F_{k+1}F_{k+2} - 1$

10. Tzw. liczby Leonarda spełniają $L_k = L_{k-1} + L_{k-2} + 1, \quad L_0 = 1, L_1 = 1$. Pokaż, że są one równe $L_k = 2F_{k+1} - 1$, gdzie $(F_k)_k$ to ciąg Fibonacciego.