Matematyka dyskretna, WMat 2024

Lista 6: Rekursja liniowa

LJSW - Liniowe, Jednorodne, o Stałych Współczynnikach
LnJSW - Liniowe, nieJednorodne, o Stałych Współczynnikach

1. Rozwiąż równania

   a) $r_k = -r_{k-1} + 6r_{k-2}, \quad r_0 = 1, r_1 = 2,$
   b) $r_k = 4r_{k-1} - 5r_{k-2}, \quad r_0 = 1, r_1 = 1,$
   c) $r_k = r_{k-3}, \quad r_0 = 1, r_1 = 2, r_2 = 3,$
   d) $r_k = r_{k-1} + 4r_{k-2} - 4r_{k-3}, \quad r_0 = 1, r_1 = 1, r_2 = 0,$

2. Niech x_k będą ustalonymi liczbami. Dla równania $r_k = ar_{k-1} + x_k, r_0 = 0$ wypisz kilka pierwszych wyrazów, na tej podstawie zaproponuj postać rozwiązania i udowodnij ten wzór.

*Zrób to samo dla $r_k = a_k r_{k-1} + x_k$, a_k - również ustalone liczby

3. Pokaż, że jeżeli współczynniki i warunek początkowy równania LnJSW są liczbami wymiernymi, to rozwiązanie jest również wymierne dla dowolnego k.

*Pokaż, że jeżeli współczynniki i warunek początkowy równania LnJSW są postaci $a + b\sqrt{c}$, a, b, c-liczby całkowite, to rozwiązanie też jest tej postaci dla dowolnego k.

4. Pokaż, że rozwiązanie równania LJSW albo jest zawsze równe 0, albo jest różne od 0 dla nieskończenie wielu k.

5. Dla ciągu okresowego $2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots$ znajdź równanie LJSW, które spełnia.

6. Wielomiany Fibonacciego są zdefiniowane jako rozwiązania równania $F_k(x) = xF_{k-1} + F_{k-2}, F_1(x) = 1, F_2(x) = x$. Podaj wzór na $F_k(x)$. Czy współczynniki wielomianu $F_k(x)$ są liczbami całkowitymi?

7. Pokaż, że dla równania LJSW

   a) Rozwiązanie ma granicę $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ wtedy i tylko wtedy, kiedy dla wszystkich pierwiastków wielomianu charakterystycznego $|\lambda_i| < 1$.
   b) Jeżeli współczynniki i warunek początkowy są liczbami całkowitymi, to a) jest niemożliwe.

8. Załóżmy, że rekurencyjnie obliczamy kolejne wartości ciągu spełniającego LnJSW (bez żadnych optymalizacji). Jak będzie rosła ilość dodawań?

9. Zbadaj, ile jest równa granica $\lim_{k\to\infty} \frac{r_k}{r_{k-1}}$ dla ogólnego rozwiązania równania LJSW.

10. Rozwiąż układ równań LJSW $r_k = 6r_{k-1} - s_{k-1}, s_k = 2r_{k-1} + 3s_{k-1}, r_0 = 1, s_0 = -1$ metodą diagonalizacji macierzy.

11. Rozwiąż równania

a) $r_k = 4r_{k-1} - 4r_{k-2}, \quad r_0 = 0, r_1 = 1,$

b) $r_k = 2r_{k-1} + 8r_{k-2} + 1, \quad r_0 = 0, r_1 = 0,$

c) $r_k = -r_{k-1} + 2r_{k-2} + 1, \quad r_0 = -1, r_1 = 0,$

d) $r_k = 2r_{k-1} - r_{k-2} - 1, \quad r_0 = 0, r_1 = 0,$