Matematyka dyskretna, WMat 2024

Lista 7: Funkcje generujące, uniwersalne twierdzenie o rekursji

1. Niech r_k to dowolny ciąg. Podaj wzór na elementy ciągu $\frac{1}{1-\mathcal{S}} r_k$.

2. Oblicz $\frac{1}{1+\mathcal{S}} q_k$ dla $q_k = 2^k$.

3. Udowodnij, że
$$\frac{1}{(1-q\mathcal{S})^a} \longleftrightarrow \binom{k+a-1}{k} q^k.$$

4. Znajdź rozwinięcie $\ln \frac{1}{1-\mathcal{S}}$.

5. Rozwiąż równania rekurencyjne:

   a) $r_k = -2r_{k-1} + 2^k, \quad r_0 = 1,$
   b) $r_k = 3r_{k-1} + k, \quad r_0 = 0,$
   c) $r_k = -3r_{k-1} - 2r_{k-2} + (-1)^k, \quad r_0 = 0, r_1 = 0,$
   d) $r_k = r_{k-1} + k^2, \quad r_0 = 0,$
   e) $r_k = -r_{k-1} + k^2, \quad r_0 = 0.$

6. Rozwiąż równanie $r_k = 2r_{k-1} + f_k, r_0 = 0$, f_k jest równe 0 dla parzystych k, 1 dla nieparzystych k.

7. Rozwiąż rekurencyjny układ równań
$$\begin{cases} r_k &= 3r_{k-1} + 2q_{k-1}, \\ q_k &= r_{k-1} + 2q_{k-1}, \end{cases} \quad r_0 = 0, q_0 = 1.$$

8. Pokaż, że dowolny wielomian W stopnia s jest klasy $W \in \mathcal{O}(x^s)$.

9. Pokaż, że ciąg Fibonacciego rośnie jak $F_n \in \Theta(\phi^n)$, gdzie ϕ to złota proporcja.

10. Udowodnij indukcyjnie, że dla ciągu T_n spełniającego założenia tw. o rekursji uniwersalnej
$$T_n = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i f_{n/b^i} + \Theta(n^{\log_b a}).$$

11. Uogólnij dowód przypadku b) uniwersalnego twierdzenia o rekursji aby pokazać, co dzieje się dla funkcji klasy $f_n \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.

* Przypadek $f_n \in \Theta(n^{\log_b a} (\log n)^c)$, $c \in \mathbb{N}$ - ustalona potęga.

12. Przeanalizuj asymptotyczne zachowanie ciągów spełniających rekurencje:

a) $T_n = 16T_{n/2} + n^4$

b) $T_n = 5T_{n/3} + n^{3/2}$

c) $T_n = 2T_{n/4} + \sqrt{n} + 1$

d) $T_n = 2T_{n/4} + n^2$

e) $T_n = T_{3n/4} + 1$

13. Przeanalizuj asymptotyczne zachowanie ciągu $r_k = r_{k-1} + 1/k$.