Symulacje komputerowe, WMat 2023

Lista 9: Losowa miara Poissona

Niech ustalony będzie zbiór z naturalną miarą Ω (naturalna miara - liczność zbioru, długość, powierzchnia, objętość, itp.). Rozpatrzmy losowy zbiór punktów $\Pi \subset \Omega, \Pi = \{p_1, p_2, \ldots\}$ oraz powiązaną z nim funkcję liczącą $N, N(A) := \#\{p_i \in \Pi \colon p_i \in A\}$. O N mówimy, że jest losową miarą Poissona gdy:

1. $N(A) \sim \mathcal{P}oiss(\lambda|A|)$, $|A|$ - miara A.
2. $N(A_1), N(A_2), \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi dla rozłącznych zbiorów $A_1, A_2, \ldots$.

Miarę taką można symulować za pomocą 2-krokowej symulacji:

1. Wylosuj zmienną $N(\Omega) \sim \mathcal{P}oiss(\lambda|\Omega|)$.
2. Jako p_i wylosuj $N(\Omega)$ niezależny zmiennych losowych z rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}(\Omega)$.

Zadania:

1. **Losowa miara Poissonowska** Wygeneruj losową miarę Poissonowską na Ω będącym:
   (a) Liczbami $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   (b) Sześcianem.
   (c) Kołem.

   Zwizualizuj wyniki.

2. **Niejednorodna losowa miara Poissonowska** Jeżeli w definicji warunek $N(A) \sim \mathcal{P}oiss(\lambda|A|)$ zastąpimy $N(A) \sim \mathcal{P}oiss\left(\int_A \lambda(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)$ otrzymamy niejednorodną losową miarę Poissonowską. Do jej wygenerowania możemy użyć metody przerzedzania, tj. wygenerować miarę jednorodną $\tilde{N}$ z intensywnością $\lambda_{\max}$, a później przerzedzić punkty, zostawiając każdy p_i z prawdopodobieństwem $\lambda(p_i)/\lambda_{\max}$. Wygenerują taką miarę na kole o $\lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda \exp(-|\boldsymbol{x}|^2)$.

3. **Miary o losowej intensywności** Wygeneruj miarę na kole jednostkowym $B(\mathbf{0}, 1)$, dla którego $\lambda(\boldsymbol{x})$ będzie losowa $\lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda \mathbf{1}_{B(\boldsymbol{X},r)}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{X} \sim \mathcal{U}(B(\mathbf{0}, 1-r))$.