Lista 1

1. Wskazać nietrywialny funkcjonał liniowy na $L^\infty(\mathbf{R})$ zerujący się na $C_b(\mathbf{R})$.

2. Pokazać, że istnieje ciągły funkcjonał liniowy T na $L^\infty(\mathbf{R})$ o własności: $Tf = f(0)$ dla $f \in C_b(\mathbf{R})$.

3. Niech x^* będzie ograniczonym funkcjonałem na podprzestrzeni M przestrzeni Hilberta H. Opisać postać rozszerzeń x^* do ciągłych funkcjonałów na H.

4. Funkcjonał g jest zdefiniowany na $C[0,1] \subset L^\infty(0,1)$ wzorem $g(f) = f(0)$, $f \in C[0,1]$. Sprawdzić, że g rozszerza się do ograniczonego funkcjonału G na $L^\infty(0,1)$. Czy istnieje funkcja $h \in L^1(0,1)$ taka, że
$$G(f) = \int_0^1 h(x)f(x)\,dx, \qquad f \in L^\infty(0,1).$$

5. Pokazać, że istnieje funkcjonał L na $\ell^\infty_{\mathbf{R}}$ o własności
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant L(\{a_n\}) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \{a_n\} \in \ell^\infty_{\mathbf{R}}.$$

6. Pokazać, że istnieje ograniczony funkcjonał L na ℓ^∞ o własnościach: i) $Lx = \lim_{n\to\infty} x_n$ dla $x = \{x_n\} \in c$; ii) $\|L\| = 1$ (w szczególności $\|Lx\| \leqslant \|x\|$). Czy L można zrealizować w postaci $Lx = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ dla pewnego $y = \{y_n\} \in \ell^1$?

7. * (Lemat Hahna) Niech M będzie podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X, niech $x_o \in X$ oraz $\operatorname{dist}(x_o, M) = d$. Udowodnić, że istnieje funkcjonał $x^* \in X^*$ taki, że $\|x^*\| \leqslant 1$, $x^*(x_o) = d$ oraz $x^*(x) = 0$ dla $x \in M$. Uzasadnić, że w przypadku $d > 0$ norma takiego funkcjonału nie może być mniejsza niż 1.

8. Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Pokazać, że jeśli X^* jest ośrodkowa to również X jest ośrodkowa. (Wsk. skorzystać z poprzedniego zadania). Czy odwrotna implikacja też jest prawdziwa?

9. Niech $n \geqslant 1$. Pokazać, że istnieje miara (znakowana) μ na $[0,1]$ taka, że dla każdego wielomianu p o stopniu $\leqslant n$, zachodzi
$$\int_0^1 p(x)\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^n p^{(k)}\Big(\frac{k}{n}\Big).$$
Dla $n = 2$ wskazać jawnie miarę μ. Czy jest ona jedyna?

10. Niech $n \geqslant 1$. Czy istnieje miara (znakowana) μ na $[0,1]$ taka, że
$$p'(0) = \int_0^1 p(x)\,d\mu(x)$$
dla każdego wielomianu p o stopniu $\leqslant n$? Czy istnieje miara (znakowana) spełniająca powyższy warunek dla dowolnego wielomianu p (bez ograniczenia na stopień)?

Autor: Krzysztof Stempak