Lista 2

1. Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta z bazą $\{e_n\}$. Niech $\{y_n\}$ będzie ciągiem elementów z H. Pokazać, że $\langle x, y_n\rangle \to 0$ dla każdego $x \in H$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $m \in \mathbf{N}$, $\langle e_m, y_n\rangle \to 0$ przy $n \to \infty$, oraz $\sup_n \|y_n\| < \infty$.

2. Uogólnić twierdzenie Hellingera - Toeplitza na parę operatorów A, B spełniających równość $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$.

3. Niech $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$, będą normami zupełnymi na przestrzeni liniowej X. Pokazać, ze nierówność $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$ implikuje $\|x\|_2 \leqslant D\|x\|_1$.

4. Pokazać, że funkcjonał wieloliniowy na przestrzeni Banacha, który jest ciągły ze względu na każdą ze zmiennych z osobna, jest ciągły. (Przypomnieć przykład funkcji na $\mathbf{R}^2$ ciągłej ze względu na każdą ze zmiennych z osobna, ale nieciągłej).

5. Podzbiór S w przestrzeni Banacha X nazywamy słabo ograniczonym, jeśli dla każdego $x^* \in X^*$, $\sup_{x\in S} |x^*(x)| < \infty$. Pokazać, że słabo ograniczony podzbiór $S \subset X$ jest ograniczony (odwrotna implikacja jest oczywista).

6. Niech $1 \leqslant p \leqslant \infty$ oraz $[a_{ij}]$, $i, j \in \mathbf{N}$, będzie macierzą liczbową taką, że dla każdych $i \in \mathbf{N}$, $x = \{x_j\} \in \ell^p$, szereg $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$ jest zbieżny oraz $Ax \in \ell^p$. Pokazać, że A jest ograniczonym operatorem na ℓ^p.

7. Sformułować i udowodnić podobne twierdzenie dla σ-skończonej przestrzeni miarowej (X, Ω, μ) i $1 \leqslant p < \infty$.

8. Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą (a więc Hausdorffa) i niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem elementów z $C_o(X)$. Wówczas $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ dla każdej miary $\mu \in M(X)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_n \|f_n\| < \infty$ oraz $f_n(x) \to f(x)$ dla każdego $x \in X$.

9. Niech X będzie przestrzenią Banacha, Y przestrzenią unormowaną. Niech $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ będzie rodziną operatorów z X do Y taką, że dla każdego $x \in X$ i każdego $g \in Y^*$, $\sup\{|g(T_\alpha x)| : \alpha \in A\} < \infty$. Wówczas $\sup\{\|T_\alpha\| : \alpha \in A\} < \infty$.

10. Niech $1 < p < \infty$ i $\{x_n\} \subset \ell^p$. Wówczas $\sum_{j=1}^{\infty} x_n(j)y(j) \to 0$ dla dowolnego $y \in \ell^q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_n \|x_n\| < \infty$ oraz $x_n(j) \to 0$ przy $n \to \infty$, dla każdego $j \in \mathbf{N}$.

11. Sformułować i udowodnić podobne twierdzenie dla σ-skończonej przestrzeni miarowej (X, Ω, μ) i $1 < p < \infty$.

12. Niech $T : X \to Y$ będzie liniowym operatorem, X, Y - przestrzenie Banacha. Załóżmy, że dla każdego $y^* \in Y^*$ funkcjonał $x \mapsto y^*(Tx)$ jest ciągły na X. Pokazać,że T jest ciągły.

Autor: Krzysztof Stempak