Równania różniczkowe w technice

Kartkówka 3, 17 grudnia 2019

Pory roku: Wiosna

Wiosna to dla niektórych osób jedna z najprzyjemniejszych pór roku. Temperatura powietrza jest coraz większa, roślinność budzi się do życia, a studenci w tym czasie jeszcze pilniej się uczą!

Niestety dla alergików jest to bardzo uciążliwy czas. Podczas wiosny dużo roślin zaczyna pylić co dla osób chorych na alergię sezonową oznacza niekończący się alergiczny nieżyt nosa (pot. katar sienny). Podczas tej kartkówki przyjrzymy się bliżej procesowi dyfuzji pyłków roślin w powietrzu. W procesie rozchodzenia się drobnych pyłków pomaga wiatr, dlatego w naszym modelu uwzględnimy wpływ poziomej składowej prędkości wiatru na zasięg rozprzestrzenia się pyłków (zakł., że wiatr wieje tylko poziomo).

Jednym z najprostszych modeli opisujących rozprzestrzenianie się pyłków roślin w powietrzy przy niezerowej poziomej składowej wiatru (rozważamy tylko model dwuwymiarowy) jest model dyfuzyjno-adwekcyjny

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x, y < 1,\ t > 0.$$

gdzie $u = u(t, x, y)$ jest funkcją opisującą stężenie pyłków w punkcie (x, y) i czasie t. W szczególności interesować nas będzie postać funkcji u w stanie ustalonym (czyli funkcja u nie zmienia się znacząco w czasie, tzn. $\partial u/\partial t \approx 0$)

$$\alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

gdzie teraz $u = u(x, y)$. Do rozwiązania powyższego równania cząstkowego zastosujemy metodę rozdzielania zmiennych, $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Po podstawieniu otrzymamy układ dwóch równań różniczkowych

$$\begin{cases} X''(x) - \frac{1}{\alpha^2}X'(x) - \lambda X(x) = 0, \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \end{cases}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. (3,5 pkt) Rozwiąż równanie na $Y(y)$ z warunkami brzegowymi $Y'(0) = Y(0)$, $Y(1) = 0$. Rozważ wszystkie możliwości znaku λ. Znajdź funkcje własne i odpowiadające im wartości własne dla rozważanego zagadnienia brzegowego.

2. (1,5 pkt) Przeprowadź normalizację zbioru funkcji własnych, znajdź takie wartości stałej multiplikatywnej dla każdej funkcji własnej aby spełniona była tożsamość

   $$\int_0^1 \phi_n^2(x)\,dx = 1,$$

   gdzie $\phi_n(x)$ jest odpowiednią funkcją własną.

3. *Dodatkowe* (1 pkt) Znając wartości własnych λ_n wyznacz rozwiązanie ogólne dla równania

   $$X''(x) - X'(x) - \lambda_n X(x) = 0.$$

Powodzenia!

Rozwiązanie

1. Rozważmy równanie

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \\ Y'(0) - Y(0) = 0, \ Y(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$. Aby rozwiązać powyższe równanie (czyli znaleźć funkcje i wartości własne) należy rozpatrzyć trzy przypadki w zależności od znaku λ:

- $\lambda < 0$
  Rozwiązanie ogólne dla równania (1) jest postaci
  $$Y(y) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}y + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}y. \tag{2}$$
  Z warunku dla $y = 0$ dostajemy, że $C_1 = C_2\sqrt{-\lambda}$. Korzystając teraz z drugiego warunku i zakł., że $Y(y)$ nie jest rozwiązaniem trywialnym dostajemy warunek na λ
  $$\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda} + \sin\sqrt{-\lambda} = 0, \tag{3}$$
  lub inaczej
  $$\tan\sqrt{-\lambda} = -\sqrt{-\lambda}. \tag{4}$$
  Następnie, należy zauważyć, że powyższe równanie ma nieskończenie wiele różnych rozwiązań $\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}$ (funkcja $\tan(x)$ jest okresowa i monotoniczna dla każdego okresu, dodatkowo wiemy, że $\lim_{x\to(\pi/2+k\pi)^+} = -\infty$). Zatem ostatecznie otrzymujemy postać funkcji własnych dla równania (1)
  $$Y_k(y) = C_k\left(\sqrt{-\lambda_k}\cos\sqrt{-\lambda_k}y + \sin\sqrt{-\lambda_k}y\right), \tag{5}$$
  gdzie λ_k spełnia równanie
  $$\tan\sqrt{-\lambda_k} = -\sqrt{-\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$
- $\lambda = 0$
  Dla tego przypadku równanie redukuje się do postaci
  $$Y''(y) = 0. \tag{7}$$
  Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja $Y(y) = ay + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Korzystając z warunków początkowych otrzymujemy
  $$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 0. \end{cases}$$
  Łatwo zauważyć, ze istnieje tylko jedna para liczb rzeczywistych, $a = b = 0$, która spełnia powyższy układ. Zatem dla warunku $\lambda = 0$ otrzymujemy rozwiązanie $Y(y) \equiv 0$.
- $\lambda > 0$
  Rozwiązując równanie (1) otrzymujemy
  $$Y(y) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}y}. \tag{8}$$
  Korzystając z warunku $Y'(0) = Y(0)$ powinniśmy sprowadzić funkcję $Y(y)$ do postaci
  $$Y(y) = C_1\left(\frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1}e^{-\sqrt{\lambda}y} + e^{\sqrt{\lambda}y}\right) \tag{9}$$
  Następnie korzystając z warunku na funkcję $Y(y)$ w $y = 1$ i zakł., że $C_1 \neq 0$ (Warunek $C_1 = 0$ od razu implikuje rozwiązanie trywialne) otrzymujemy
  $$f_1(\lambda) := e^{2\sqrt{\lambda}} = -\frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1} =: f_2(\lambda). \tag{10}$$
  Obliczając $f_1(0) = 1$, $f_2(0) = 1$ oraz zauważając, że funkcja $f_1(\lambda)$ jest ściśle rosnąca, a funkcja $f_2(\lambda)$ jest ściśle malejąca (zatem $f_2(\lambda) < 1$) dla $\lambda > 0$ możemy wnioskować, że nie istnieje takie $\lambda^* > 0$ aby $f_1(\lambda^*) = f_2(\lambda^*)$. Ostatecznie, dla $\lambda > 0$ otrzymujemy rozwiązanie trywialne $Y(y) \equiv 0$.

2. Znając postać funkcji własnych możemy przystąpić do normalizacji zbioru funkcji własnych $\{Y_k\}$. Szukamy takiej wartości stałych C_k aby spełniona była równość

$$\int\limits_0^1 Y_m(y)Y_n(y)\,dy = \delta_{nm}, \quad n,m \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

gdzie δ_{nm} deltą Kroneckera. Ortogonalność funkcji własnych wynika bezpośrednio z teorii zagadnień Sturma–Liouville'a. Aby znaleźć wartość stałej C_k musimy policzyć całkę

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 Y_k^2(y)\,dy =& C_k^2 \int\limits_0^1 \left(\sqrt{-\lambda_k}\cos\sqrt{-\lambda_k}y + \sin\sqrt{-\lambda_k}y\right)^2 dy \\ =& \frac{C_k^2}{4}\left(2(-\lambda_k+2) + \frac{(-\lambda_k-1)\sin 2\sqrt{-\lambda_k}}{\sqrt{-\lambda_k}} - 2\cos 2\sqrt{-\lambda_k}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Aby (11) było spełnione stała C_k musi mieć następującą postać

$$C_k = 2\left(2(-\lambda_k+2) + \frac{(-\lambda_k-1)\sin 2\sqrt{-\lambda_k}}{\sqrt{-\lambda_k}} - 2\cos 2\sqrt{-\lambda_k}\right)^{-1/2}. \tag{13}$$

3. Łatwo zauważyć, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $1/4 < (\pi/2)^2 < -\lambda_k$. Zatem rozwiązując równanie

$$X''(x) - X'(x) - \lambda_k X(x) = 0, \tag{14}$$

otrzymujemy rozwiązanie ogólne postaci

$$X_k(x) = C_1 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-(4\lambda_k+1)}x\right) + C_2 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-(4\lambda_k+1)}x\right). \tag{15}$$