

ALGEBRA z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

wersja NA ĆWICZENIA odbywające się co dwa tygodnie

PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH, WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

1. Uprościć podane wyrażenia

(a) $2\sqrt{3} - \sqrt{27}$; (b) $(3\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{3} + 3)$; (c) $3a^{\frac{5}{6}} \cdot 8a^{\frac{2}{3}}$; (d) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$;
(e) $\left(\frac{45x^{-4}y^2}{9z^{-8}}\right)^{-3}$; (f) $\frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} : \frac{y^2 + y + 1}{y^2 + 2y + 1}$; (g) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}}$; (h) $\frac{6x^4 - 6y^4}{x - y}$.

2. Usunąć niewymierności z mianownika

(a) $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$; (b) $\frac{3}{\sqrt{7} - 2}$; (c) $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}$; (d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

3. Napisać rozwinięcia potęg podanych dwumianów

(a) $(y + z)^2$; (b) $(3x - 4)^3$; (c) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^4$; (d) $\left(p + \frac{2}{p^3}\right)^5$.

4. Wyznaczyć współczynnik rozwinięcia występujący przy t

(a) $(b + 4)^5$, $t = b^3$; (b) $(2p - 3q)^7$, $t = p^2q^5$; (c) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6 \left(\frac{1}{2x} + x\right)^6$, $t = x^0$.

DZIAŁANIA NA MACIERZACH

5. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F = [-7 \ 3 \ 1 \ 1].$$

Wyznaczyć, jeśli jest to możliwe, następujące macierze

$$A + C, \quad \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}C, \quad C - 2A^T, \quad AB, \quad BA, \quad BC + BA^T, \quad B^2, \quad D^T F, \quad DF, \quad F \cdot 5D, \quad CC^T - (CC^T)^T.$$

6.

(a) Obliczyć $AB - BA$, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Podać przykład dwóch macierzy $A \neq B$, stopnia 2 różnych od macierzy skalarnych i takich, że $AB = BA$.

7. Określić wymiar i wyznaczyć rzeczywistą macierz X spełniającą równanie macierzowe

(a) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [6 \ 2 \ 7]$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$; (c) $2X + X^T = X + I$;

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; (e) $(XA)^T = (A^T + 3I)X^T$, gdzie A jest macierzą 3×3 .

8. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć iloczyn AB a następnie rozwiązać równanie $XA = C$ z niewiadomą X .

WYZNACZNIKI, MACIERZE ODWROTNE

9. Wiadomo, że

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6.$$

Znaleźć wartości wyznaczników

(a) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} g & d & a \\ h & e & b \\ i & f & c \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} -3a & b & c - 4b \\ -3d & e & f - 4e \\ -3g & h & i - 4h \end{vmatrix}$.

10. Niech A będzie rzeczywistą macierzą stopnia 7, której wyznacznik wynosi 2. Ile wynosi wyznacznik macierzy $2A$, $-5A$, A^2 , $-A^3$, $(A^T)^2$?

11. Napisać rozwinięcie Laplace'a względem podanych wierszy/kolumn (nie obliczać podanych wyznaczników)

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, 1. kolumna; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \pi & 6 & -3 \end{vmatrix}$, 2. wiersz; (c) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & 24 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, 3. kolumna.

12. Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -13 - \lambda & -8 & -4 \\ 12 & 7 - \lambda & 4 \\ 24 & 16 & 7 - \lambda \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

13. Dla jakich wartości parametrów rzeczywistych c, h, k, λ poniższe macierze są odwracalne

(c) $\begin{bmatrix} c & 1 \\ c & -1 \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & -1 \\ 1 & 1 & h \end{bmatrix}$; (k) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & k \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (l) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$?

14. Wykorzystując metodę obliczania dopełnień algebraicznych wyznaczyć macierze odwrotne, jeśli istnieją, do podanych macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

15. Wykorzystując metodę bezwyznacznikową (przekształceń elementarnych na wierszach) wyznaczyć macierze odwrotne, jeśli istnieją, do podanych macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Znaleźć rozwiązania podanych równań macierzowych

$$(a) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(c) (X^T + 5I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(d) X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(e) \left(2X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(f) 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(I - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} X = I.$$

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

17. Korzystając ze wzorów Cramera, jeśli to możliwe, wyznaczyć wskazane niewiadome z układów równań liniowych

$$(a) \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases}, \quad x, y; \quad (b) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}, \quad y; \quad (c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = \alpha \\ y + z = \beta \end{cases}, \quad z;$$

$$(d) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 14 \\ x_1 - x_2 + 4x_4 = 9 \\ x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}, \quad x_4; \quad (e) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 1 \\ 9x_3 + 10x_4 = 0 \\ 12x_4 = 1 \end{cases}, \quad x_1, x_2.$$

18. Rozwiązać podane układy równań liniowych wykorzystując metodę eliminacji Gaussa

$$(a) \begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + y = 1 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} x + y + 2z + w = 5 \\ 2x + 3y - z - 2w = 2 \\ 4x + 5y + 3z = 7 \\ 5x + 7y - 3w = 4 \end{cases}; \quad (c) \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases};$$

$$(d) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 + 20x_4 = 13 \\ -6x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 8x_4 = -3 \end{cases}; \quad (e) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ -6x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 - x_4 = -7 \end{cases}.$$

19. Znaleźć rozwiązanie poniższego układu równań obliczając macierz odwrotną do macierzy głównej a następnie wykorzystując mnożenie macierzy

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 17 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -14 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 23 \end{cases}.$$

Podać dwa inne sposoby rozwiązania tego układu.

20. Dla jakich wartości parametru λ układ równań

$$\begin{cases} 3x + 2y = \lambda x \\ 4x + 5y = \lambda y \end{cases}$$

ma rozwiązanie inne niż $x = y = 0$?

21. Przedyskutować ilość rozwiązań układu równań w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (4-a)x + 2y - z = 1 \\ -2x + (1-a)y + 2z = 2 \\ -x + 2y + (4-a)z = 1 \end{cases}.$$

22. Wykorzystać metodę eliminacji Gaussa do rozwiązania układu równań, którego macierz rozszerzona ma postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Gdzie jest błąd w poniższej metodzie 'rozwiązania'?

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 \rightarrow 2w_2 - w_3 \\ w_3 \rightarrow w_3 - 2w_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & -1 & -4 & -9 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{w_1 \rightarrow w_1 + \frac{1}{2}w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 + w_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \frac{5}{2} & 5 & \frac{15}{2} \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_1 \rightarrow -1 \cdot w_1 \\ w_2 \rightarrow -\frac{1}{4}w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Stąd $x_1 = -\frac{15}{2} + \frac{5}{2}x_3 + 5x_4$, $x_2 = -\frac{9}{4} + \frac{1}{4}x_3 + x_4$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

LICZBY ZESPOŁONE

23. Obliczyć

(a) $(-7 + 12i) - (3 - 6i) + (1 + 2i)$;

(i) $\begin{bmatrix} \alpha i & 0 \\ 0 & -\beta i \end{bmatrix}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(c) $(1 + i)\overline{(1 + i)}$;

(b) $(1 + 2i)(-2 + 3i)(1 - i)$;

(e) $i^{109} + i^{-5} + (-i)^{13} + (-i)^{-7}$;

(d) $(1 - 3i)^3$;

(g) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$;

(f) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \dots i^{2018}$;

$$(h) \frac{5+5i}{3-4i} + \overline{\left(\frac{20}{4-3i}\right)};$$

$$(j) \begin{bmatrix} \alpha i & 0 \\ 0 & -\beta i \end{bmatrix}^{-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

24. Znaleźć rozwiązania poniższych równań

$$(a) 4 + 5i = z - (1 - i); \quad (b) |z| + z = 3 + 4i; \quad (c) z^2 = -i; \quad (d) (3 + i)\bar{z} = 2iz;$$

$$(e) 4z^2 + 8|z|^2 = 8; \quad (f) \frac{1}{z} + \frac{1}{2-i} = \frac{3}{1+i}; \quad (g) z^2 = \bar{z}; \quad (h) \frac{1+z^2}{1-z^2} = i.$$

25. Korzystając m.in. z interpretacji geometrycznej modułu liczby zespolonej opisać i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej następujące zbiory spełniające poniższe warunki

$$(a) |z - 2| = 3; \quad (b) |z + i| < 2; \quad (c) |z - 1 + 2i| \geq 3; \quad (d) |z + 2| = |z - 5 + i|;$$

$$(e) |2iz + 4| \leq 8; \quad (f) 0 < \operatorname{Re}(iz) \leq 1; \quad (g) -1 < \operatorname{Im}(z + 5) < 1; \quad (h) \operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = 0.$$

26. Przedstawić w postaci trygonometrycznej/wykładniczej liczby zespolone

$$(a) -4i; \quad (b) -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad (c) \sin a + i \cos a, \quad a \in \mathbb{R}; \quad (d) \frac{i}{(1-i)^3}.$$

27. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć

$$(a) (2\sqrt{3} - 2i)^{44}; \quad (b) (1+i)^{21} + (1-i)^{21}; \quad (c) (1-i)^{-18}; \quad (d) \frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}.$$

Wynik podać w postaci algebraicznej.

28. Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej zbiory spełniające poniższe warunki na argument główny

$$(a) \arg(-1+i) < \arg z < \arg(1-i); \quad (b) \frac{\pi}{4} \leq \arg(z^3) < \pi; \quad (c) \arg(3\pi) < |z+2| \leq \frac{\sqrt{8}}{\pi} \cdot \arg(i);$$

$$(d) \frac{3\pi}{2} \leq \arg(-iz) < 2\pi; \quad (e) \arg(z - 3 + 2i) = \frac{\pi}{6}; \quad (f) \arg(z^4) = \frac{2\pi}{3} \wedge |z - 2| < 2.$$

29. Znaleźć i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki

$$(a) \sqrt[3]{-27}; \quad (b) \sqrt[5]{32i}; \quad (c) \sqrt[4]{\sqrt{3}+i}; \quad (d) \sqrt{i};$$

$$(e) \sqrt[6]{1+i}; \quad (f) \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9}; \quad (g) \sqrt[4]{(1-i)^4}; \quad (h) \sqrt[3]{(2-2i)^6}.$$

30. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania

$$(a) z^2 + 4z + 13 = 0; \quad (b) z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0; \quad (c) z^3 - 8i = 0; \quad (d) z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = i;$$

$$(e) iz^2 + (1+2i)z + 1 = 0; \quad (f) z^4 - 2z^2 + 4 = 0; \quad (g) e^z = 1; \quad (h) z^6 - (1+i)z^3 + i = 0.$$

WIELOMIANY

31. Wypisać wszystkie możliwe pierwiastki całkowite/wymierne wielomianów

$$(a) 6x^4 + 35x^3 - 233x + 36; \quad (b) x^5 - \frac{9}{2}x^4 + 6x^3 - \frac{7}{2}x^2 - x - 1; \quad (c) x^8 - 6x^3 + 13x + 120.$$

32. Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów

(a) $-x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$; (b) $3x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 2x^2$; (c) $x^4 - 3, 3x^3 + 2, 3x^2 + 0, 6x$;
 (d) $x^5 - \frac{11}{6} + 5x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 4x - \frac{2}{3}$; (e) $x^5 + x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 9x + 9$.

33. Znaleźć wszystkie (rzeczywiste i zespolone) pierwiastki wielomianów

(a) $x^4 - x^2 - 2$; (b) $x^5 + x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 9x + 9$;
 (c) $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$; (d) $x^3 - 6x^2 + 13x - 10$.

34. Sprawdzić, że x_1 jest pierwiastkiem wielomianu P a następnie znaleźć pozostałe pierwiastki

(a) $x_1 = i$, $P(x) = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13$;
 (b) $x_1 = 1 - i$, $P(x) = x^3 - (1 - i)x^2 + x + (-1 + i)$;
 (c) $x_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $P(x) = x^4 - 4x^2 - 16x - 16$.

35. Znaleźć rozkład wielomianu W na czynniki rzeczywiste nierozkładalne

(a) $W(x) = x^4 + 1$; (b) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 29x - 30$; (c) $W(x) = x^3 - 6x - 9$.

36. Zaproponować rozkład na sumę rzeczywistych ułamków prostych (bez wyznaczania stałych w liczniku)

(a) $\frac{x-1}{x^2(x^2+9)^3}$; (b) $\frac{2}{(x^2+1)^4(x^2+4x+2)}$; (c) $\frac{4x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x + 1)^2}$.

37. Podane funkcje wymierne rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych

(a) $\frac{2x^2 + 7x + 7}{x(x+1)(x+3)}$; (b) $\frac{8x^2 - x + 3}{x^3 + x}$; (c) $\frac{6x^2 + 3x - 9}{x^2(x+3)}$; (d) $\frac{-x^2 + x + 1}{x(x+1)^2}$;
 (e) $\frac{2x + 4}{4x^2 + 12x + 9}$; (f) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; (g) $\frac{3x - 7}{x - 3}$; (h) $\frac{8x^2 - 4x + 8}{x^4 + 4}$.

38. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianu P przez Q

(a) $P(x) = (x+3)^{28} + (x+2)^{10} + (5x+9)^{2019}$, $Q(x) = x+2$;
 (b) $P(x) = x^{100}$, $Q(x) = (x-1)(x-2)$;
 (c) $P(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$, $Q(x) = x^3 - x$.

GEOMETRIA ANALITYCZNA

39. Dla wektorów $\vec{u} = (2, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = (1, 3, -5)$ obliczyć podane wyrażenia, jeśli mają one sens

(a) $|\vec{v}|$; (b) $\vec{u} \circ \vec{w}$; (c) $(2\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$; (d) $|\vec{u} - \vec{v}| \times \vec{w}$; (e) $|\vec{w}| - \vec{v} \circ \vec{w}$;
 (f) $|\vec{u}|\vec{v} - \vec{w}$; (g) $\vec{u} \times \vec{w} - \vec{v}$; (h) $\vec{u} \circ (\vec{w} - \vec{v})$; (i) $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$; (j) $(\vec{u} \circ \vec{v}) \times \vec{w}$.

40. Bez wyznaczania równania prostej, sprawdzić czy punkty $P = (2, -1, 4)$, $Q = (5, 4, 6)$ i $R = (-4, -11, 0)$ leżą na jednej prostej.

41. Znaleźć wektor \vec{u} współliniowy z wektorem $\vec{v} = (2, 1, -1)$ i spełniający warunek $\vec{v} \circ \vec{u} = 3$.
42. Znaleźć wszystkie wektory jednostkowe, które są prostopadłe jednocześnie do wektorów $\vec{u} = (2, -1, 1)$ i $\vec{v} = (4, 1, -2)$.
43. Obliczyć
- (a) pole powierzchni trójkąta o wierzchołkach w punktach $A = (1, 2, 0)$, $B = (3, 0, -3)$ i $C = (5, 2, 6)$;
- (b) objętość czworościanu o wierzchołkach w punktach $A = (2, -1, 1)$, $B = (5, 5, 4)$, $C = (3, 2, -1)$ i $D = (4, 1, 3)$;
- (c) pole powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (3, -4, 1)$, $\vec{v} = (-3, 6, 0)$;
- (d) pole powierzchni równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (3, -5, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, -2)$, $\vec{w} = (3, 1, 1)$.
44. Dane są wierzchołki czworościanu: $A = (0, 0, 2)$, $B = (3, 0, 5)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (4, 1, 2)$. Obliczyć długość wysokości opuszczonej z wierzchołka D .
45. Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez
- (a) punkty $A = (0, 3, 1)$, $B = (1, 0, -1)$ i $C = (2, -2, -2)$;
- (b) punkt $P = (2, 1, -1)$, której wektor normalny to $\vec{n} = (1, -2, 3)$;
- (c) punkt $(3, 4, -5)$ i równoległej do dwóch wektorów $\vec{a} = (3, 1, -1)$ i $\vec{b} = (1, -2, 1)$;
- (d) punkt $(1, -2, 4)$ i równoległej do płaszczyzny Oxz ;
- (e) punkt $(4, -1, 2)$ i przez oś Ox ;
- (f) punkty $P_1 = (2, -1, 1)$, $P_2 = (3, 1, 2)$ i równoległej do osi Oy ;
- (g) środek odcinka AB , gdzie $A = (3, 1, 7)$ a $B = (1, -3, 3)$ i prostopadłej do tego odcinka.
46. Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostej przechodzącej przez
- (a) dwa punkty $(1, 1, -2)$ i $(3, -1, 0)$;
- (b) punkt $P = (2, 1, -1)$, której wektor kierunkowy to $\vec{n} = (1, -2, 3)$;
- (c) punkt $M_1 = (2, 0, -3)$ i równoległej do wektora $\vec{a} = (2, -3, 5)$;
- (d) punkt $M_1 = (2, 0, -3)$ i równoległej do osi Oy ;
- (e) punkt $M_1 = (2, 3, -5)$ i równoległej do prostej
- $$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases};$$
- (f) przez punkt $P = (2, 3, 0)$ i prostopadłej do prostych
- $$k: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \text{ i } \quad l: x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z - 3}{3};$$
- (g) punkt $P = (-1, 2, -3)$, prostopadłej do wektora $\vec{a} = (6, -2, -3)$ i przecinającej prostą $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

47. Zależć punkty przecięcia

(a) dwóch prostych $k: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t - 2 \\ z = -4t + 6 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad l: \begin{cases} x = s + 5 \\ y = -4s - 1 \\ z = s - 4 \end{cases}, s \in \mathbb{R};$

(b) prostej $k: \frac{1-x}{2} = \frac{y+3}{2} = z-3$ z płaszczyzną $\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$.

48. Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $M = (2, -2, 1)$ i prostą

$$\{(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(2, -3, 2): t \in \mathbb{R}\}.$$

49. Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez proste

(a) $k: \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x - 2y - 4z = -3 \end{cases}$ i $l: \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0 \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0 \end{cases};$

(b) $k: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ i $l: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

50. Wyznaczyć odległość

(a) punktu $P = (1, -1, -2)$ od prostej $l: \frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2};$

(b) punktu $M = (-1, 1, -2)$ od płaszczyzny przechodzącej przez punkty $M_1 = (1, -1, 1), M_2 = (-2, 1, 3), M_3 = (4, -5, -2);$

(c) między prostymi równoległymi $k: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ i $l: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4};$

(d) między prostymi nierównoległymi $k: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ i $l: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1};$

(e) między płaszczyznami $\pi_1: 2x - y + 2z + 9 = 0$ i $\pi_2: 4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

51. Wyznaczyć kąt między prostymi

(a) $x - 3 = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ i $x + 2 = y - 3 = \frac{z+5}{\sqrt{2}};$

(b) $\{x = 3t - 2, y = 0, z = -t + 3, t \in \mathbb{R}\}$ i $\{x = 2s - 1, y = 0, z = s - 3, s \in \mathbb{R}\};$

(c) $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}$ i $\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}.$

52. Wyznaczyć kąt między płaszczyznami

(a) $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ i $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0;$ (b) $x + 2y - z = 3$ i $x - 3y - z = 5;$

(c) $6x + 3y - 2z = 0$ i $x + 2y + 6z - 12 = 0;$ (d) $x - 3z + 2 = 0$ i $2x - 6z - 7 = 0.$

53. Wyznaczyć wartości a i b , dla których płaszczyzny

$$2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y - z + b = 0, \quad x + ay - 6z + 10 = 0$$

(a) mają punkt wspólny;

(b) przechodzą przez jedną prostą;

(c) przecinają się w trzech różnych prostych.

54. Wyznaczyć rzut prostokątny prostej k na płaszczyznę π , gdzie

(a) $k: (x, y, z) = (1, 0, 0) + r(2, -1, 1), \quad \pi: (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 1, 0) + t(2, 1, -1), \quad r, s, t \in \mathbb{R};$

(b) $k: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = 3-z, \quad \pi: 3x + 2y - z + 2 = 0;$

(c) $k: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}, \quad \pi: x - y + 3z - 5;$

(d) $k: \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}, \quad \pi: 4x - 3y + 7z - 7 = 0.$

55. Wyznaczyć rzut

(a) punktu $P = (2, -1, 3)$ na prostą $\frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$ w kierunku wektora $\vec{u} = (-1, 1, -1);$

(b) punktu $P = (2, 1, -2)$ na płaszczyznę $\pi: x + 2y - z - 2 = 0$ w kierunku wektora $\vec{u} = (1, 2, 3);$

(c) prostej $l: x = -2y = 3z$ na płaszczyznę $\pi: x + y + z - 5 = 0$ w kierunku wektora $\vec{u} = (1, -1, 1).$

56. Określić czy punkt $Q = (2, -1, 1)$ i początek układu współrzędnych leżą po tej samej stronie płaszczyzny

(a) $5x - 3y + z - 18 = 0;$ (b) $2x + 7y + 3z + 1 = 0;$ (c) $x + 5y + 12z - 1 = 0.$

57. Prawda czy fałsz? Jeśli to prawda należy uzasadnić stwierdzenie, a jeśli fałsz - podać kontrprzykład. W przestrzeni \mathbb{R}^3 równanie $y = x$ przedstawia prostą przechodzącą przez punkt $(1, 1, 0).$

Opracowanie: Karina Olszak