ALGEBRA LINIOWA 2
Wydział Mechaniczny / AIR, MTR
Semestr letni 2009/2010
Prowadzący: **dr Teresa Jurlewicz**

Przekształcenia liniowe

Uwaga. W nawiasach kwadratowych podane są numery zadań znajdujących się w podręczniku T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 2. Przykłady i zadania*. Tam też znajdują się odpowiedzi do tych zadań oraz rozwiązane przykłady o podobnej treści.

Podstawowe określenia

Zadanie 1 [Zad. 3.1] Uzasadnić liniowość wskazanych przekształceń odpowiednich przestrzeni liniowych:

a) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2,\ L(x,y,z)=(x+y,\ 2x-y+3z)$;

b) $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\ L$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół punktu $(0,0)$;

c) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3,\ L$ jest symetrią względem płaszczyzny yOz;

d) $L:\mathbf{R}[x]\to\mathbf{R}^3,\ (Lp)(x)=\left(\int_0^1 p(t)\,dt,\ p'(2),\ p''(3)\right)$ dla $p\in\mathbf{R}[x]$;

e) $L:\mathbf{C}(\mathbf{R})\to\mathbf{R}_2[x],\ (Lf)(x)=x^2f(2)+xf(1)+f(0)$ dla $f\in\mathbf{C}(\mathbf{R})$.

Zadanie 2 [Zad. 3.2] Uzasadnić, że podane przekształcenia odpowiednich przestrzeni liniowych nie są liniowe:

a) $L:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ L(x)=(x+1)(x-1)$;

b) $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\ L(x,y)=(3x+2y-1,\ 2x-3y)$;

c) $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\ L$ jest symetrią względem prostej $l: x+y+2=0$;

d) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3,\ L$ jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\pi: x-y+z=1$;

e) $L:\mathbf{R}[x]\to\mathbf{R}[x],\ (Lp)(x)=p(x)\,p'(x)$ dla $p\in\mathbf{R}[x]$;

f) $L:\mathbf{C}(\mathbf{R})\to\mathbf{C}(\mathbf{R}),\ (Lf)(x)=\sin f(x)$ dla $f\in\mathbf{C}(\mathbf{R})$.

Zadanie 3 [Zad. 3.3] Napisać wzory wszystkich przekształceń liniowych $L:\mathbf{M}_{2\times 2}\to\mathbf{R}$.

Zadanie 4 [Zad. 3.4] Przekształcenie liniowe $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ przeprowadza wektor $\overrightarrow{x}=(2,1,1)$ na wektor $\overrightarrow{u}=(4,5)$ oraz wektor $\overrightarrow{y}=(1,-3,2)$ na wektor $\overrightarrow{v}=(-6,1)$. Znaleźć obraz wektora $\overrightarrow{z}=(5,6,1)$ w tym przekształceniu. Czy przy tych danych można znaleźć wektor $L(4,1,5)$?

Jądro i obraz przekształcenia liniowego*

Zadanie 5 [Zad. 3.5] Znaleźć jądra i obrazy podanych przekształceń liniowych posługując się ich interpretacją geometryczną. Porównać uzyskane odpowiedzi z wynikami obliczeń algebraicznych:

a) $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ jest rzutem prostokątnym na prostą $l: y=x$;

b) $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ jest jednokładnością względem punktu $(0,0)$ w skali $k=2$;

c) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ jest symetrią względem płaszczyzny xOy;

d) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ jest rzutem prostokątnym na prostą $l: x=y,\ z=0$;

e) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{6}$ wokół osi Oy.

Zadanie 6 [Zad. 3.6] Wyznaczyć jądra, obrazy oraz ich bazy dla podanych przekształceń liniowych:

a) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2,\ L(x,y,z)=(x+y,\ y+z)$;

b) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^4,\ L(x,y,z)=(2x-y+z,\ x+2y-z,\ -x+3y-2z,\ 8x+y+z)$;

c) $L:\mathbf{R}_2[x]\to\mathbf{R}_2[x],\ (Lp)(x)=(x^2+x)\,p(2)+(3x^2-x)\,p(1)$.

Zadanie 7 [Zad. 3.7] Podać wymiary jąder i obrazów następujących przekształceń liniowych:

a) $L:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3,\ L(x,y,z,t)=(x+y+z-t,\ 2x+y-z+t,\ y+3z-3t)$;

b) $L:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^3,\ L(x,y,z,s,t)=(x+y+z,\ y+z+s,\ z+s+t)$;

c) $L:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4,\ L(x,y,z,t)=(x-2y+3z-4t,\ 3x+5z+2t,\ x+y+z+3t,\ 5x-y+9z+t)$.

Zadanie 8* [Zad. 3.8*] Skonstruować przykłady przekształceń liniowych mających podane jądra i obrazy:

a) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2,\ \operatorname{Ker} L=\{(x,y,0): x,y\in\mathbf{R}\},\ \operatorname{Im} L=\{(x,y): x+y=0\}$;

b) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2,\ \operatorname{Ker} L=\{(x,y,z): x+y+z=0\},\ \operatorname{Im} L=\{(x,y): x+3y=0\}$;

c) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2,\ \operatorname{Ker} L=\operatorname{lin}\{(1,1,2),\ (1,-1,0)\},\ \operatorname{Im} L=\{(x,y): 2x=3y\}$;

d) $L:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4,\ \operatorname{Ker} L=\operatorname{Im} L=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4: 2x-z=3y-t=0\}$;

e) $L:\mathbf{R}_2[x]\to\mathbf{R}_2[x],\ \operatorname{Ker} L=\operatorname{lin}\{1-x\},\ \operatorname{Im} L=\operatorname{lin}\{1+x, 1+x^2\}$.

Zadanie 9* Niech $\mathbf{X},\ \mathbf{Y}$ będą przestrzeniamu liniowymi. Uzasadnić, że dla dowolnych podprzestrzeni $\mathbf{U},\ \mathbf{V}$ odpowiednio przestrzeni $\mathbf{X},\ \mathbf{Y}$ spełniających zależność

$$\dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{V}=\dim\mathbf{X}<\infty$$

istnieje przekształcenie liniowe $L:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ takie, że $\operatorname{Ker} L=\mathbf{U}$ oraz $\operatorname{Im} L=\mathbf{V}$.

Macierz przekształcenia liniowego

Zadanie 10 [Zad. 3.9] Napisać macierze podanych przekształceń liniowych w bazach standardowych rozważanych przestrzeni liniowych:

a) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^4,\ L(x,y,z)=(x+y,\ x+z,\ y-z,\ y+2z)$;

b) $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3,\ L(x,y)=(4x+3y,\ x-2y,\ 3x+5y)$;

c) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3,\ L$ jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\pi: x+2y+4z=0$;

d) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3,\ L$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół osi Oz;

e) $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}_2[x],\ (L(a,b))(x)=(a+b)\,x^2+(3a-b)\,x+6a$.

Zadanie 11 [Zad. 3.10] Znaleźć z definicji macierze podanych przekształceń liniowych we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:

a) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3,\ L(x,y,z)=(x-y,\ y-z,\ z-x),\ \overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{v_1}=(1,0,0),\ \overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{v_2}=(1,1,0),$
$\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{v_3}=(1,1,1)$;

b) $L: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2,\ L(x,y,z,t) = (x+y,\ z+t),\ \overrightarrow{u_1} = (1,0,0,0),\ \overrightarrow{u_2} = (1,2,0,0),$
$\overrightarrow{u_3} = (1,2,3,0),\ \overrightarrow{u_4} = (1,2,3,4),\ \overrightarrow{v_1} = (1,0),\ \overrightarrow{v_1} = (1,2);$

c) $L: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3,\ L(x,y,z,t) = (x+2z+t,\ -2x+y-3z-5t,\ x-y+z+4t),$
$\overrightarrow{u_1} = (1,0,0,0),\ \overrightarrow{u_2} = (1,1,0,0),\ \overrightarrow{u_3} = (1,1,1,0),\ \overrightarrow{u_4} = (1,1,1,1),\ \overrightarrow{v_1} = (0,0,1),$
$\overrightarrow{v_2} = (0,1,1),\ \overrightarrow{v_3} = (1,1,1);$

d) $L: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L$ jest rzutem prostokątnym na oś $Ox,\ \overrightarrow{u_1} = (1,2),\ \overrightarrow{u_2} = (2,3),\ \overrightarrow{v_1} = (2,1),$
$\overrightarrow{v_2} = (3,2);$

e) $L: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ L$ jest przekształceniem identycznościowym, tj. $L(x,y,z) = (x,y,z),$
$\overrightarrow{u_1} = (0,1,1),\ \overrightarrow{u_2} = (1,0,1),\ \overrightarrow{u_3} = (1,1,0),\ \overrightarrow{v_1} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v_2} = (1,1,0),$
$\overrightarrow{v_3} = (1,1,1);$

f) $L: \mathbf{R}_1[x] \to \mathbf{R}_2[x],\ (Lp)(x) = x^2 p'(x),\ p_1 = 2x+3,\ p_2 = 3x-4,\ q_1 = x^2+x,$
$q_2 = x+1,\ q_3 \equiv 1;$

g*) $L: \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_{n-1}[x],\ (Lp)(x) = p'(x+1),\ p_0 \equiv q_0 \equiv 1,\ p_k = q_k = \frac{x^k}{k!}$ dla
$1 \le k \le n-1,\ p_n = \frac{x^n}{n!}.$

Zadanie 12 [Zad. 3.11] Macierz przekształcenia liniowego $L: \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ ma w bazach $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$, $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ przestrzeni liniowych **U, V** postać

$$A_L = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć obrazy wektorów **a)** $\vec{u} = -2\overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_2}$; **b)** $\vec{u} = 6\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ w tym przekształceniu.

Zadanie 13 [Zad. 3.12] Dla podanych przekształceń liniowych przestrzeni $\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)$ naszkicować zbiory $\mathbf{D}$ oraz $L(\mathbf{D})$ i porównać ich pola (objętości), jeżeli:

a) $L: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L(x,y) = (-2x,\ 3y),\ \mathbf{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \le 1\};$

b) $L: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L(x,y) = (x+2y,\ 2x+y),\ \mathbf{D} = [-2,1] \times [0,1];$

c) $L: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ L(x,y,z) = (3x,\ 3y,\ -z),$
$\mathbf{D} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \le 4;\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}.$

Zadanie 14 [Zad. 3.13] Rozwiązać ponownie **Zadanie 11** stosując tym razem wzór na zamianę macierzy przekształcenia liniowego przy zmianie baz wychodząc od baz standardowych rozważanych przestrzeni liniowych.

Zadanie 15 [Zad. 3.14] Napisać macierze podanych przekształceń liniowych $L: \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ w podanych bazach przestrzeni $\mathbf{U}$. Wykorzystać wzór na zmianę macierzy przekształcenia przy zmianie bazy:

a) $L(x,y) = (x+3y,\ y-3x),\ \mathbf{U} = \mathbf{R}^2,\ \overrightarrow{u_1} = (2,1),\ \overrightarrow{u_2} = (-1,3);$

b) L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $xOz,\ \mathbf{U} = \mathbf{R}^3,\ \overrightarrow{u_1} = (1,1,0),\ \overrightarrow{u_2} = (2,3,2),$
$\overrightarrow{u_3} = (0,1,3);$

c) $(Lp)(x) = x^2 p(0) + x p'(1),\ \mathbf{U} = \mathbf{R}_2[x],\ p_1 = x^2+x+1,\ p_2 \equiv 1,\ p_3 = x+1.$

Zadanie 16 [Zad. 3.15] Przekształcenie liniowe $L : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ ma w bazie $\{ \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \}$ przestrzeni liniowej $\mathbf{U}$ i w bazie $\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \}$ przestrzeni liniowej $\mathbf{V}$ macierz

$$A_L = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Napisać macierz A' przekształcenia L w bazach $\{ 3\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2},\ -\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \}$ przestrzeni $\mathbf{U}$ i $\{ \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3},\ 3\overrightarrow{v_2},\ 2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3} \}$ przestrzeni $\mathbf{V}$.

Zadanie 17* [Zad. 3.16] Skonstruować (o ile to jest możliwe) takie bazy odpowiednich przestrzeni liniowych, w których podane przekształcenia liniowe mają wskazane macierze:

a) $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L(x,y) = (x,y),\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$;

b) $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,\ L(x,y) = (x+y,\ 2x-y,\ x-3y),\ A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ L(x,y,z) = (x,y,z),\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

d) $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ L(x,y,z) = (x,y,z),\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$;

Czy w przykładach **a)** i **c)** bazy dziedziny i obrazu przekształcenia L mogą być takie same?

Zadanie* 18 [Zad. 3.31*] Napisać wzór jednego z przekształceń liniowych będących obrotem w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ o kąt α wokół prostej $x = at,\ y = bt,\ z = ct$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, przy czym $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Liniowe przekształcenia płaszczyzny i przestrzeni

Zadanie 19 RZUT PROSTOKĄTNY W NA PROSTĄ W $\mathbf{R}^2$:

a) podać wzór rzutu prostokątnego P w $\mathbf{R}^2$ na oś Ox (Oy), uzasadnić liniowość P i napisać macierz A_P w bazie standardowej $\mathbf{R}^2$;

b) wyprowadzić wektorowy wzór rzutu prostokątnego P w $\mathbf{R}^2$ na prostą $l : \vec{r} = t\vec{v}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, uzasadnić liniowość P i przyjmując $\vec{v} = (a,b)$ napisać macierz A_P w bazie standardowej $\mathbf{R}^2$;

c) podać macierz rzutu prostokątnego P na płaszczyźnie na prostą $l : x = 2t,\ y = -5t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, i znaleźć obraz punktu $M = (-3, 2)$ w tym przekształceniu;

b) wyprowadzić wektorowy wzór rzutu prostokątnego P w $\mathbf{R}^2$ na prostą $k : \vec{r} \circ \vec{n} = 0$ i przyjmując $\vec{n} = (A,B)$ napisać macierz A_P w bazie standardowej $\mathbf{R}^2$;

e) podać macierz rzutu prostokątnego P na płaszczyźnie na prostą $k : 3x + y = 0$ i znaleźć obraz punktu $M = (-2, 4)$ w tym przekształceniu.

Zadanie 20 SYMETRIA WZGLĘDEM PROSTEJ W $\mathbf{R}^2$:

a) podać wzór symetrii S w $\mathbf{R}^2$ względem osi Ox (Oy), uzasadnić liniowość S i napisać macierz A_S w bazie standardowej $\mathbf{R}^2$;

b) wyprowadzić wektorowy wzór symetrii S w $\mathbf{R}^2$ względem prostej $l: \vec{r} = t\,\vec{v}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, uzasadnić liniowość S i przyjmując $\vec{v} = (a, b)$ napisać macierz A_S w bazie standardowej $\mathbf{R}^2$;

c) podać macierz symetrii S na płaszczyźnie względem prostej $l: x = 2t,\ y = -5t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, i znaleźć obraz punktu $M = (-3, 2)$ w tym przekształceniu;

d) wyprowadzić wektorowy wzór symetrii S w $\mathbf{R}^2$ względem prostej $k: \vec{r} \circ \vec{n} = 0$ i przyjmując $\vec{n} = (A, B)$ napisać macierz A_S w bazie standardowej $\mathbf{R}^2$;

e) podać macierz symetrii S na płaszczyźnie względem prostej $k: 3x + y = 0$ i znaleźć obraz punktu $M = (-2, 4)$ w tym przekształceniu.

Zadanie 21 RZUT PROSTOKĄTNY W NA PROSTĄ W $\mathbf{R}^3$:

a) podać wzór rzutu prostokątnego P w $\mathbf{R}^3$ na oś Ox (Oy, Oz), uzasadnić liniowość P i napisać macierz A_P w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

b) wyprowadzić wektorowy wzór rzutu prostokątnego P w $\mathbf{R}^3$ na prostą $l: \vec{r} = t\,\vec{v}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, uzasadnić liniowość P i przyjmując $\vec{v} = (a, b, c)$ napisać macierz A_P w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

c) podać macierz rzutu prostokątnego P w przestrzeni na prostą $l: x = t,\ y = 2t,\ z = -4t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, i znaleźć obraz punktu $M = (5, 1, -2)$ w tym przekształceniu.

Zadanie 22 SYMETRIA WZGLĘDEM PROSTEJ W $\mathbf{R}^3$:

a) podać wzór symetrii S w $\mathbf{R}^3$ względem osi Ox (Oy, Oz), uzasadnić liniowość S i napisać macierz A_S w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

b) wyprowadzić wektorowy wzór symetrii S w $\mathbf{R}^3$ względem prostej $l: \vec{r} = t\,\vec{v}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, uzasadnić liniowość S i przyjmując $\vec{v} = (a, b, c)$ napisać macierz A_S w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

c) podać macierz symetrii S w przestrzeni względem prostej $l: x = t,\ y = 2t,\ z = -4t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, i znaleźć obraz punktu $M = (5, 1, -2)$ w tym przekształceniu.

Zadanie 23 RZUT PROSTOKĄTNY W NA PŁASZCZYZNĘ W $\mathbf{R}^3$:

a) podać wzór rzutu prostokątnego P w $\mathbf{R}^3$ na płaszczyznę xOy (xOz, yOz), uzasadnić liniowość P i napisać macierz A_P w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

b) wyprowadzić wektorowy wzór rzutu prostokątnego P w $\mathbf{R}^3$ na płaszczyznę $\pi: \vec{r} \circ \vec{n} = 0$, uzasadnić liniowość P i przyjmując $\vec{n} = (A, B, C)$ napisać macierz A_P w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

c) podać macierz rzutu prostokątnego P w przestrzeni na płaszczyznę $\pi: 2x - y + 2z = 0$ i znaleźć obraz punktu $M = (4, -3, 1)$ w tym przekształceniu.

Zadanie 24 SYMETRIA WZGLĘDEM PŁASZCZYZNY W $\mathbf{R}^3$:

a) podać wzór symetrii S w $\mathbf{R}^3$ względem płaszczyny xOy (xOz, yOz), uzasadnić liniowość S i napisać macierz A_S w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

b) wyprowadzić wektorowy wzór symetrii S w $\mathbf{R}^3$ względem płaszczyzny $\pi: \vec{r} \circ \vec{n} = 0$, uzasadnić liniowość S i przyjmując $\vec{n} = (A, B, C)$ napisać macierz A_S w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

c) podać macierz symetrii S w przestrzeni względem płaszczyzny $\pi: 2x - y + 2z = 0$ i znaleźć obraz punktu $M = (4, -3, 1)$ w tym przekształceniu.

Zadanie 25 OBRÓT W $\mathbf{R}^2$:

a) podać wzór obrotu R w $\mathbf{R}^2$ o kąt α względem początku układu współrzędnych, uzasadnić liniowość R i napisać macierz A_R w bazie standardowej $\mathbf{R}^2$;

b) podać macierz obrotu R na płaszczyźnie o kąt $\alpha = \frac{\pi}{6}$ względem początku układu współrzędnych i znaleźć obraz punktu $M = (2, -3)$ w tym przekształceniu.

Zadanie 26 ZORIENTOWANY OBRÓT W $\mathbf{R}^3$:

a) podać wzory obrotów R_x, R_y, R_z w przestrzeni o kąt α względem zorientowanych osi Ox, Oy, Oz;

b) uzasadnić liniowość obrotów R_x, R_y, R_z i napisać ich macierze w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

c*) wyprowadzić wektorowy wzór obrotu R w przestrzeni o kąt α względem zorientowanej osi $l: \vec{r} = t\vec{v}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, uzasadnić liniowość R i przyjmując $\vec{v} = (a, b, c)$ napisać macierz A_R w bazie standardowej $\mathbf{R}^3$;

d) podać macierz obrotu o kąt $\alpha = \frac{\pi}{2}$ w przestrzeni względem zorientowanej osi $l: x = t,\ y = 2t,\ z = -2t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$ i znaleźć obraz punktu $M = (1, -2, 4)$ w tym przekształceniu;

e) sprawdzić, że macierz $S = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & -7 \\ 1 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ jest macierzą obrotu w $\mathbf{R}^3$ względem pewnej osi, wyznaczyć kąt oraz oś tego obrotu.

Działania na przekształceniach liniowych

Zadanie 27 [Zad. 3.17] Napisać macierze w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni liniowych przekształceń $L_3 \circ L_2 \circ L_1$ oraz $(L_2)^2 \circ L_1$, jeżeli:

a) $L_1: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,\ L_1(x, y, z) = (x - y + z,\ 2y + z)$,
$L_2: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L_2(x, y) = (2x + y,\ x - y)$,
$L_3: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4,\ L(x, y) = (x - y,\ y - x,\ 2x,\ 2y)$;

b) $L_1: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_2[x],\ L_1(a, b) = ax^2 + bx + a - b$ dla $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,
$L_2: \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x],\ (L_2 p)(x) = x\,p'(-x)$ dla $p \in \mathbf{R}_2[x]$,
$L_3: \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}^2,\ (L_3 p)(x) = (p(1),\ p'(2))$ dla $p \in \mathbf{R}_2[x]$.

Zadanie 28 [Zad. 3.18] Niech J, K, L będą przekształceniami przestrzeni $\mathbf{R}^3$ w siebie, przy czym J jest symetrią względem osi Oz, K jest symetrią względem płaszczyzny xOz, L jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oy. Napisać macierze w bazie standardowej przestrzeni $\mathbf{R}^3$ przekształceń liniowych będących złożeniami J, K i L we wszystkich sześciu możliwych kolejnościach.

Zadanie 29 [Zad. 3.19] Dla tych spośród podanych przekształceń liniowych, które są odwracalne, napisać macierze i wzory przekształceń odwrotnych:

a) $L: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L(x,y) = (3x-2y,\ 4x-3y);$

b) $L: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ L(x,y,z) = (y+2z,\ x+y+z,\ 2x+3y+2z);$

c) $L: \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x],\ (Lp)(x) = xp(2x) - 4p(x)$ dla $p \in \mathbf{R}_2[x];$

d) $L: \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}_3[x],\ (Lp)(x) = x^3 p'(0) + p(2x)$ dla $p \in \mathbf{R}_3[x].$

Zadanie 30 [Zad. 3.20] Macierz przekształcenia liniowego $L: \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ ma w bazie $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ przestrzeni liniowej $\mathbf{U}$ postać

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć **a)** $L^3(\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3});$ **b)** $L^{-1}(3\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}).$

Wartości i wektory własne przekształcenia liniowego

Zadanie 31 [Zad. 3.21] Dla podanych liniowych przekształceń płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ i przestrzeni $\mathbf{R}^3$ znaleźć wartości własne i wektory własne wykorzystując interpretację geometryczną tych przekształceń:

a) symetria na płaszczyźnie względem punktu $(0,0);$

b) rzut prostokątny w przestrzeni na oś $Oz;$

c) rzut prostokątny w przestrzeni na prostą $l: x = y = z;$

d) rzut prostokątny w przestrzeni na płaszczyznę $\pi: x + y + z = 0;$

e) symetria w przestrzeni względem płaszczyzny $xOy;$

f) symetria w przestrzeni względem prostej $l: x + y = 0,\ z = 0.$

Sprawdzić otrzymane wyniki algebraicznie.

Zadanie 32 [Zad. 3.22] Znaleźć wartości własne i wektory własne podanych liniowych przekształceń rzeczywistych przestrzeni liniowych:

a) $L: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L(x,y) = (4x+2y,\ y-x);$

b) $L: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L(x,y) = (2x+y,\ 4y-x);$

c) $L: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ L(x,y,z) = (x,\ 2x+2y,\ -x-y-z);$

d) $L: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ L(x,y,z) = (3x-y,\ 6x-2y,\ 2x-y+z);$

e) $L: \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x],\ (Lp)(x) = p''(x);$

f) $L: \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x],\ (Lp)(x) = 2xp'(x) + x^2 p(0) + p(2).$

Zadanie 33 [Zad. 3.23] Znaleźć wartości własne i wektory własne podanych przekształceń liniowych wskazanych zespolonych przestrzeni liniowych:

a) $L: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2,\ L(x,y) = (3x-y, 10x-3y);$

b) $L: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2,\ L(x,y) = ((1-2i)x + 5y, (1+i)x - (1-3i)y);$

c) $L : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3,\ L(x,y,z) = (z, 3y, -x)$;

d) $L : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3,\ L(x,y,z) = (-ix-2z, y, 2x-iz)$.

Zadanie 34 [Zad. 3.24] Podać wszystkie możliwe wartości własne przekształceń liniowych L spełniających podane warunki:

a) $L^2 = -L$; **b)** $L^3 = I$.

Zadanie 35 [Zad. 3.25] Napisać macierze podanych przekształceń liniowych przestrzeni $\mathbf{R}^2$ lub $\mathbf{R}^3$ w bazach ich wektorów własnych (o ile takie bazy istnieją):

a) $L(x,y) = (x+4y, 2x+3y)$;

b) $L(x,y) = (5x-3y, 3x-y)$;

c) $L(x,y,z) = (x-z, x+2y+z, z-x)$;

d) $L(x,y,z) = (-x-3y-2z, -x+y+2z,\ x+3y+2z)$.

Zadanie 36 [Zad. 3.26] Przekształcenie liniowe $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ przeprowadza wektory $(1,1)$, $(1,-1)$ odpowiednio na wektory $(1,1)$, $(3,-3)$. Obliczyć $L^{50}(5,1)$.

Zadanie 37 [Zad. 3.27] Przekształcenie liniowe $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ spełnia warunki $L(0,1,1) = (0,1,1)$, $L(2,2,0) = (0,0,0)$, $L(1,0,0) = (-1,0,0)$. Obliczyć:

a) $L(x,y,z)$ dla $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$; **b)** $L^{105}(2,3,6)$.

Zadanie 38 [Zad. 3.28] Znaleźć wartości własne i wektory własne podanych macierzy rzeczywistych :

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; **g)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; **h)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 39 [Zad. 3.29] Wyznaczyć wartości i wektory własne podanych macierzy zespolonych :

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$; **c)** ; $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 6i & 0 & 0 \\ 4 & 4+2i & 0 \\ i & 1 & 5i \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} i & i & i \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} -i & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -i \end{bmatrix}$.

Teresa Jurlewicz, 22 lutego 2010 r.