Analiza Matematyczna 2
rok akademicki 2023/24
Lista 1

Zadanie 1. Zapisz ciąg sum częściowych (S_n) i zbadaj zbieżność szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2)^n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,
e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} 2^k}{3^n}\right)$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$.

Zadanie 2. Korzystając z kryterium o zagęszczaniu zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$, b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Zadanie 3. Korzystając z kryterium porównawczego zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3-2\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$, d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Zadanie 4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^6-15n^2+1}{4n^5-5n^4+2}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n-1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+3}\right)$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Zadanie 5. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2+1)^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^n}}{(n+1)^{n^2}}$.

Zadanie 6. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)((3n)!)}{((2n)!)^2}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n(n!)}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n}$.

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$,
e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-1)$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\,\operatorname{tg}\frac{1}{n}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}}\left(\frac{5}{4}\right)^n$.

Zadanie 8. Wykazując zbieżność odpowiedniego szeregu i korzystając z warunku koniecznego zbieżności tego szeregu, udowodnij, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{n!} = 0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{n^n} = 0$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n} = 0$.

Zadanie 9. Zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n - \ln n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n^3}{2^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2 + (-1)^n}{n}$, d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{(\ln n)^5}$,
e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{3n+2}{n^2 - n + 4}$.

Zadanie 10. Zbadaj zbieżność szeregów:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\pi/3)}{\sqrt{n}}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

Zadanie 11. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Co można powiedzieć o zbieżności szeregów:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 \sqrt{a_n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n a_n}{n + a_n}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$?

Zadanie 12. Załóżmy, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne. Co można powiedzieć o zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$?

Zadanie 13. Udowodnij twierdzenie: *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (ε_n), gdzie $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ jest zbieżny.*

Zadanie 14. Załóżmy, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są zbieżne. Wykaż, że wówczas szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n}$ są zbieżne bezwzględnie.

Zadanie 15. Czy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ implikuje zbieżność szeregu:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n$?

Zadanie 16. Wskaż przykład takiego ciągu (a_n), aby szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ był zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ był rozbieżny. Wykaż, że w każdym takim przypadku $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, ale nie bezwzględnie.

Zadanie 17*. Zdefiniujmy

$$A = \{n \in \mathbb{N}_+ : \text{rozwinięcie dziesiętne liczby } n \text{ nie zawiera cyfry } 0\}.$$

Ustawiamy elementy zbioru A w ciąg rosnący i oznaczamy ten ciąg jako $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Udowodnić, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ jest zbieżny.