Analiza Matematyczna 2
rok akademicki 2023/24
Lista 2

Zadanie 1. Wykaż, że a) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{1}{2}$, b) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$.

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność iloczynów nieskończonych:

a) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$, b) $\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$, c) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Zadanie 3. Załóżmy, że iloczyny nieskończone $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, oraz że $a_n, b_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Czy z tego wynika zbieżność iloczynu:

a) $\prod_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, b) $\prod_{n=1}^{\infty} a_n^2$, c) $\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, d) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$?

Zadanie 4. Wyznacz obszary zbieżności i funkcje graniczne ciągów funkcyjnych

$$\text{(a) } f_n(x) = \frac{3-2nx}{2+3nx^2}, \quad \text{(b) } f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{3}{n}} - \sqrt{x+\frac{1}{n}}\right),$$
$$\text{(c) } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność jednostajną ciągów funkcyjnych na podanych zbiorach

$$\text{(a) } f_n(x) = nx^n(1-x),\ [0,1],\ [0,1),\ [0,a],\ 0<a<1,$$
$$\text{(b) } f_n(x) = \frac{n}{n+x^2},\ \mathbb{R},\ [-a,a],\ a>0,$$
$$\text{(c) } f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ \mathbb{R},\ (-\infty,-a]\cup[a,\infty),\ a>0,$$
$$\text{(d) } f_n(x) = \frac{2}{1+x^n},\ [0,1],\ [0,a],\ 0<a<1.$$

Zadanie 6. Niech f będzie dowolną funkcją określoną na przedziale $[a,b]$ i niech

$$f_n(x) = \frac{\lfloor nf(x)\rfloor}{n},\ x\in[a,b],\ n\in\mathbb{N}.$$

Udowodnij, że ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie do f na $[a,b]$.

Zadanie 7. Wyznacz obszary zbieżności szeregów funkcyjnych

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \text{(b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n, \quad \text{(c) } \sum_{n=0}^{\infty} ne^{n(x^2-1)}, \quad \text{(d) } \sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}, \quad \text{(e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Zadanie 8. Zbadaj, czy podany szereg jest zbieżny jednostajnie na wskazanej dziedzinie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < \infty$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2 < x < \infty$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $-\infty < x < \infty$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leqslant x < \infty$.

Zadanie 9. Udowodnij zbieżność jednostajną na zbiorze D następujących szeregów

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{\sqrt{n}},\ D=[a,\pi-a],\ 0<a<\frac{\pi}{2},$$
$$\text{(b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^n \cos(nx),\ D=[a,2\pi-a],\ 0<a<\pi,$$
$$\text{(c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^x},\ D=[a,\infty),\ a>0,$$
$$\text{(d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}},\ D=[0,\infty).$$

Zadanie 10. Pokaż, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}, \; x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$$

jest różniczkowalna.

Zadanie 11. Oblicz promień zbieżności i wyznacz przedział zbieżności podanego szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-2)^n$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$,
e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$, $a \geqslant b > 0$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$
i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^2}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x+5}{4}\right)^n$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{3^n+7^n}$, l*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$.

Zadanie 12. Napisz rozwinięcie szeregowe każdej z poniższych funkcji i podaj przedział zbieżności szeregu:

a) e^{-x}, b) e^{x^2}, c) $\frac{1}{1+x^2}$, d) $\sin^2 x$, e) $\frac{x^{10}}{1-x}$, f) $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$,
g) $\frac{1}{(1-x)^2}$, h) $\frac{e^{2x}-1}{x}$, i) $x\sin(3x)$.

Zadanie 13. Korzystając z rozwinięcia pochodnej $f'(x)$ w szereg potęgowy i całkując wyraz po wyrazie, znajdź szereg potęgowy dla funkcji $f(x)$: a) $f(x) = \ln(1+x)$, b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Zadanie 14. Wychodząc z rozwinięcia Maclaurina funkcji $\sqrt{1+x}$ znajdź rozwinięcia Maclaurina funkcji

(a) $\sqrt{1-x}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (d) $\arcsin x$, (e) $\arccos x$.

Zadanie 15. Podaj przykład szeregu potęgowego, dla którego zbiorem zbieżności jest:
a) $(0,\ 4]$, b) $(-2,\ 0)$, c) $[-3,\ 3]$.

Zadanie 16. Wyznacz szereg Taylora o środku $x_0 = 1$ dla funkcji: a) $\frac{1}{x}$, b) $(x+1)e^x$.

Zadanie 17. Dla podanej funkcji f oraz $n \in \mathbb{N}$ oblicz $f^{(n)}(0)$:
a) $f(x) = \frac{1}{1-3x}$, $n = 100$, b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $n = 49$,
c) $f(x) = e^{-3x^2}$, $n = 31$, d)$f(x) = e^{3x}\sin x$, $n = 100$.

Zadanie 18. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Zadanie 19. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych, oblicz sumy podanych szeregów:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{5^n}, \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n7^n}, \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{4^n},$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}, \qquad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)5^n}, \qquad f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)27^n}.$$

Zadanie 20*. Korzystając z szeregu Taylora odpowiedniej funkcji elementarnej, oblicz sumę:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$.