Analiza Matematyczna 2
rok akademicki 2023/24
Lista 3

Zadanie 1. Korzystając z definicji, zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:
a) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, b) $\int_{-\infty}^0 x\, e^x\, dx$, c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Zadanie 2. Korzystając z definicji, zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:
a) $\int_0^e \ln x\, dx$, b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx$, c) $\int_1^e \frac{dx}{x\,\ln x}$, d) $\int_1^2 \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

Zadanie 3. Korzystając z kryterium porównawczego, sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych

$$a)\int\limits_2^\infty \frac{\sin 2x\, dx}{xe^{-x}+x^2-1},\quad b)\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}\sin 5x\, dx,\quad c)\int\limits_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\, dx,\quad d)\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{x+\sin x+\operatorname{tg} x}.$$

Zadanie 4. Korzystając z kryterium ilorazowego, sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych

$$a)\int\limits_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}},\quad b)\int\limits_1^\infty \frac{x+\sqrt{x^3+\sin x}}{x^2+\sqrt[4]{x^9+\cos x}}\, dx,\quad c)\int\limits_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}\, dx,\quad d)\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx\ (\alpha\in\mathbb{R}).$$

Zadanie 5. Korzystając z kryterium Dirichleta, sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych

$$a)\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x}\cos x\, dx,\quad b)\int\limits_1^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}\, dx\ (\alpha>0),\quad c)\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\sin 2x}{x^\alpha}\, e^{\sin x}\, dx\ (\alpha>0).$$

Zadanie 6. Zbadać zbieżność bezwzględną i zbieżność całek:
a) $\int_2^\infty \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}dx$, b) $\int_\pi^\infty \frac{(\sin x+\cos x)^4}{(x^2-1)^3}dx$, c*) $\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$.

Zadanie 7. Stosując odpowiednie kryterium, zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:
a) $\int_0^\infty \frac{dx}{(\sqrt[3]{2x+5})^4}$, b) $\int_{2\pi}^\infty \frac{x+\sin x}{x^2-1}\, dx$, c) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-x}}$, d) $\int_{-\infty}^{-\pi} e^x\,\cos\frac{1}{x}\, dx$.

Zadanie 8. Stosując odpowiednie kryterium, zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:
a) $\int_0^1 \frac{(x+1)\,dx}{\sin^2 x}$, b) $\int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{\cos x}$, c) $\int_0^2 \frac{dx}{\ln(x+1)}$, d) $\int_1^4 \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$.

Zadanie 9. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:
a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\, dx$, b) $\int_0^\infty \frac{dx}{\ln x}$, c) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$, d) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}}$.

Zadanie 10. Wykazać, że całki

$$a)\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx,\quad b)\int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx\quad (a>0)$$

są zbieżne bezwzględnie dla $\alpha>1$, zbieżne warunkowo dla $0<\alpha\leqslant 1$ i rozbieżne dla $\alpha\leqslant 0$.

Zadanie 11. Niech funkcja f będzie ciągła na przedziale $[1, \infty)$. Dowieść, że jeśli całka $\int_1^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, to całka $\int_1^\infty f(x^2)dx$ też jest zbieżna. Czy prawdziwy jest odpowiednik tego twierdzenia dla całki $\int_0^1 f(x)dx$?

Zadanie 12. (a) Pokazać, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ nie jest warunkiem koniecznym zbieżności całki $\int_a^\infty f(x)dx$. W tym celu rozpatrzyć całkę $\int_1^\infty \sin(x^2)dx$.
(b) Czy powyższa teza pozostaje prawdziwa w przypadku funkcji monotonicznej f ?
(c) Skonstruować przykład całki zbieżnej $\int_1^\infty f(x)dx$, pomimo tego że istnieje ciąg $x_n \to \infty$, dla którego $f(x_n) \to \infty$.

Zadanie 13. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, \infty)$ oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że $|f'(x)| \leqslant C$ dla każdego $x \in [a, \infty)$. Dowieść, że jeśli całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna bezwzględnie, to $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Zadanie 14. Załóżmy, że funkcja f jest malejąca na przedziale $[0, \infty)$ i całka $\int_0^\infty f(x)dx$ jest zbieżna. Dowieść, że $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.