

Analiza Matematyczna 2

rok akademicki 2023/24

Lista 4

Zadanie 1. Wyznacz i narysuj dziedziny funkcji, zadanych wzorami:

a) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$, b) $g(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

Zadanie 2. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, b) $g(x, y) = \sqrt{xy}$, c) $h(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

Zadanie 3. Dla $a = 0$, oraz $a = 1$ narysuj i nazwij powierzchnie $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = a\}$, jeżeli

a) $f(x, y, z) = x + y + z$, b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Zadanie 4. Zbadaj istnienie granicy:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^3 + y^3 + 1} - 1}$, b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,-3)} \frac{xy + 12}{x^2 + y^2 - 25}$, c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2}$,
d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin \frac{1}{xy}$.

Zadanie 5. Określ funkcję f w punkcie $(0, 0, 0)$, aby była w nim ciągła, przy czym dla $(x, y, z) \neq$

$(0, 0, 0)$ mamy a) $f(x, y, z) = \frac{xy + yz + zx}{|x| + |y| + |z|}$, b) $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} - 1}$.

Zadanie 6. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji:

a) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$, b) $g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, c) $h(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

Zadanie 7. Oblicz pochodne (tzn. odpowiednie macierze) poniższych funkcji:

a) $f(x, y) = e^{xy}$, b) $g(x, y, z) = xy + yz + xz$, c) $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
d) $u(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Zadanie 8. Zbadaj istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right), & \text{jeśli } y \neq 0, \\ 0, & \text{jeśli } y = 0. \end{cases}$$

Zadanie 9. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność funkcji $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ w punkcie $(0, 0)$.

Zadanie 10. Sprawdź ciągłość i istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji

a) $f(x, y) = xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$, dla $(x, y) \neq (0, 0)$ i $f(0, 0) = 0$,

b) $g(x, y) = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$, dla $(x, y) \neq (0, 0)$ i $g(0, 0) = 0$.

Zadanie 11. Dla podanych niżej funkcji oblicz odpowiednie pochodne cząstkowe:

a) $f(x, y) = x \ln(xy)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, b) $g(x, y) = x^3 \sin y + y^3 \sin x$, $\frac{\partial^6 g}{\partial x^3 \partial y^3}$.

Zadanie 12. Dana jest funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right), & \text{jeśli } xy \neq 0, \\ 0, & \text{jeśli } xy = 0. \end{cases}$$

Sprawdź, czy zachodzi równość $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.