Analiza Matematyczna 2
rok akademicki 2023/24
Lista 5

Zadanie 1. Dana jest funkcja $p(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$ zmiennych $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ i parametru $a > 0$. Sprawdź, że ta funkcja spełnia *równanie ciepła*

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}.$$

Zadanie 2. Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Dla stałej $c \in \mathbb{R}$ połóżmy $u(x,y) = f(x - cy) + g(x + cy)$. Wykaż, że $u''_{yy} = c^2 u''_{xx}$.

Zadanie 3. Oblicz pochodne podanych funkcji w zadanych punktach i kierunkach:
a) funkcja $f(x,y,z) = xy^2z^3$, punkt $M = (3,2,1)$, kierunek $\vec{MN}$, gdzie $N = (5,4,2)$,
b) funkcja $f(x,y) = x^2 - y^2$, punkt $M = (1,1)$, $\vec{v}$ to wersor tworzący kąt skierowany 60° z dodatnią półosią Ox,
c) funkcja $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, punkt $M = (3,4)$, kierunek $\vec{v}=\mathbf{grad}\, f$ w tym punkcie,
d) funkcja $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, punkt $M = (1,2,1)$, w kierunku wektora $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Zadanie 4. Sprawdź, że dla każdego wersora $\vec{v}$ funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^6+2y^2}, & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{jeśli } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma pochodną kierunkową $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}$, ale nie jest ciągła w $(0,0)$.

Zadanie 5. Wykaż, że gdy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma na pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) ograniczone pochodne cząstkowe f'_x oraz f'_y, to jest ciągła w (x_0, y_0).

Zadanie 6. Znajdź równania: płaszczyny stycznej i prostej normalnej w punkcie (x_0, y_0, z_0) do powierzchni $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$. Uwaga. Prosta normalna to prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej w danym punkcie.

Zadanie 7. Napisz wzory Taylora z resztą R_3 dla podanych funkcji na otoczeniach wskazanych punktów:
a)$f(x,y) = \sin^2(x+y)$, $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$,
b)$f(x,y) = x \sin y$, $(x_0, y_0) = (0, \pi)$.

Zadanie 8. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f
a) $f(x,y) = x^2 + 6y^2 - 4xy - 2x + 2y - 1$;
b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 10\ln x - 4\ln y$;
c) $f(x,y) = xy(1 - x - y)$,
d) $f(x,y) = xy\ln(x^2 + y^2)$,
e) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{3}(2x^3 + 2y^3 + z^3) - 2xy - z$;
f) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} + \dfrac{z}{x+y}$ dla $x, y, z > 0$.

Zadanie 9. Podaj przykład funkcji ciągłej dwóch zmiennych, która ma dokładnie dwa maksima lokalne własciwe i nie ma żadnego minimum lokalnego. Czy istnieje funkcja jednej zmiennej o tej własności?

Zadanie 10. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji:
(a) $f(x, y) = 5x^3 - 4xy + y^2 + x$ na kwadracie $D = [0, 1] \times [0, 1]$,
(b) $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 + 2xy$ na zbiorze ograniczonym krzywymi $2y = x^2$ i $y = 2$,
(c) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ na kole $x^2 + y^2 \leqslant 36$.

Zadanie 11. (a) Znajdź obraz trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$ przez funkcję $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 3y$.
(b) Znajdź obraz kwadratu o danych trzech wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ przez funkcję $f(x, y) = 8x + 4y - x^2y$.

Zadanie 12. Znajdź największą wartość iloczynu czterech liczb dodatnich o sumie 4.

Zadanie 13. Jakie powinny byc długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej, otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była jak najmniejsza?

Zadanie 14. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y(x)$ określonych równaniami

a) $xe^y - y + 1 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$, c) $x - y = \sin x - \sin y$.

Zadanie 15. Znaleźć ekstrema funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki

a) $f(x, y) = xy$, $x + y = 0$, b) $f(x, y) = 2x - 2xy + y^2$, $y = x^2$, c) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $xy = 4$.

Zadanie 16. Stosując metodę Lagrange'a znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji na zadanych zbiorach
a) $f(x, y) = x - y$ na zbiorze $x^2 + y^2 = 2$,
b) $f(x, y) = -x^2/4 + 3xy + y^2$ na zbiorze $x^2 + y^2 = 13$,
c) $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ na zbiorze $4x^2 + y^2 = 25$.