Analiza Matematyczna 2
rok akademicki 2023/24
Lista 6

Zadanie 1. Oblicz całki iterowane:

a) $\int_0^3 \left(\int_1^2 (x + y^2 x)\, dy \right) dx$, b) $\int_1^2 \left(\int_0^3 (x + y^2 x)\, dx \right) dy$, c) $\int_0^{\ln 3} \left(\int_0^{\ln 4} e^{x+y}\, dy \right) dx$.

Zadanie 2. Oblicz całki

a) $\iint_R \sin(x+y)\, dxdy$, gdzie $R = [0,\, \pi/4] \times [-\pi/4,\, \pi/4]$,
b) $\iint_R \frac{1}{(x+y+1)^3}\, dxdy$, gdzie $R = [0,\, 2] \times [0,\, 1]$,
c) $\iint_R x \sin(xy)\, dxdy$, gdzie $R = [0,\, 1] \times [\pi,\, 2\pi]$.

Zadanie 3. Niech $R = [0,1] \times [0,1]$. Oblicz

$$\iint_R \frac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy.$$

Zadanie 4. Załóżmy, że f ciągła na [a,b]. Rozpatrując całkę $\iint_R (f(x) - f(y)^2\, dxdy$, gdzie $R = [a,b] \times [a,b]$, udowodnij nierówność

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx \right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Zadanie 5. Zamień całkę podwójną po obszarze D na całki iterowane, gdy D jest ograniczony podanymi krzywymi:

a) $y = |x-1|$, $y = 2 - |x-1|$, b) $x = y^2$, $y = x - 2$.

Zadanie 6. Narysuj obszar całkowania, a następnie zmień kolejność całkowania w podanej całce iterowanej:

a) $\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\, dy$, b) $\int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 f(x,y)\, dx$, c) $\int_1^{e^2} dy \int_0^{\ln y} f(x,y) dx$.

Zadanie 7. Oblicz całki iterowane:

a) $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} \frac{y}{x^2}\, dy \right) dx$,
b) $\int_0^3 \left(\int_0^y \sqrt{y^2+16}\, dx \right) dy$,
c) $\int_0^2 \left(\int_{y/2}^1 y e^{x^3}\, dy \right) dy$.

Wskazówka. W c) zamienić kolejność całkowania.

Zadanie 8. Oblicz całki po obszarach regularnych:

a) $\iint_D (x+y)\,dxdy$, gdzie D ograniczony krzywymi $y=\sqrt{|x|},\ 2y=|x|,\ |x|=1$,
b) $\iint_D y\,dxdy$, gdzie D ograniczony krzywymi $y=2-x^2,\ y=-1,\ y=1,\ x=1-\sqrt{1-y^2}$.

Zadanie 9. Korzystając z odpowiednich własności całek podwójnych, oblicz całkę $\iint_R \lfloor x+y\rfloor\,dxdy$, gdy $R=[0,2]\times[0,2]$.

Zadanie 10. Dokonując zamiany zmiennych $u=y-x$, $v=y+2x$ oblicz całkę

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy,$$

gdzie D zbiór ograniczony krzywymi $y-x=0$, $y-x=1$, $y+2x=-1$, $y+2x=4$.

Zadanie 11. Stosując współrzędne biegunowe oblicz całki
a) $\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2-1}$, gdzie D ograniczony krzywymi $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$,
b) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, gdzie $D=\{(x,y):\ y\geqslant 0, y\leqslant x^2+y^2\leqslant x\}$,
c) $\iint_D \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2}$, gdzie $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant x,\ x^2+y^2\leqslant y\}$.

Zadanie 12. Stosując całki podwójne, oblicz pole obszaru ograniczonego podanymi krzywymi
a) $y=\sqrt{|x|}$, $y=x^2$, b) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=-\pi/4$, $x=\pi/4$.

Zadanie 13. Oblicz objętość bryły, którą z kuli $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ wycina
a) walec $x^2+y^2\leqslant a^2$, $0<a<R$, b) stożek $z=-\sqrt{x^2+y^2}$.

Zadanie 14. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami
a) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$, b) $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

Zadanie 15. Dla jakiej dodatniej wartości parametru p poniższa całka jest zbieżna?

$$\iint_{\{x^2+y^2\geqslant 1\}} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$$

Zadanie 16. Oblicz
a) $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+9y^2)^{3/2}}$,
b) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-2y^2}\,dx\,dy$,
c) $\iint_D e^{-x-2y}\,dx\,dy$, gdzie $D=\{(x,y):\ x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$.

Zadanie 17. Zapisz poniższe obszary jako obszary normalne :
a) $U = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$, b) $U = \{(x, y, z) \,:\, \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant H\}$
c) $U = \{(x, y, z) \,:\, x^2+y^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$, d) $U = \{(x, y, z) \,:\, x^2+y^2 \leqslant z \leqslant H\}$

Zadanie 18. Oblicz podane całki iterowane:
a) $\int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{x^2-y^2}} \sqrt{x^2 - y^2}\, dz,$ b) $\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{y^2}^{y} xy\, dz.$

Zadanie 19. Używając współrzędnych walcowych, oblicz całkę:
$\iiint_U (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz,$ gdzie bryła U jest ograniczona powierzchniami $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $z = 8$.

Zadanie 20. Używając współrzędnych sferycznych, oblicz całki:
a) $\iiint_U \dfrac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$ gdzie bryła U jest ograniczona powierzchniami $x^2+y^2+z^2 = 9$ oraz $x^2 + y^2 + z^2 = 16$,
b) $\iiint_U (xyz)\, dx\, dy\, dz,$ gdzie bryła U jest ograniczona powierzchnią $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ oraz płaszczyznami układu i rozpatrujemy pierwszy oktant układu współrzędnych, tzn. $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, z \geqslant 0$.

Zadanie 21. Oblicz całkę $\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$, gdzie U jest ograniczona powierzchniami o równaniach $z = 1$ i $x^2 + y^2 = z^2$. Wsk. Co to za bryła? Jakie współrzędne będą tu najwygodniejsze?

Zadanie 22. Oblicz masy podanych obszarów o zadanych gęstościach objętościowych
a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9\}$, gdzie $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,
b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leqslant 16,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$, gdzie $\gamma(x, y, z) = x^2+y^2$.

Uwaga. Masa M obszaru U o gęstości objętościowej $\gamma(x, y, z)$ wynosi

$$M = \iiint_U \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$