Analiza Matematyczna 2
rok akademicki 2023/24
Lista 7

Zadanie 1. Niech $F(y) = \int_0^1 e^{xy}\,dx$, gdzie $y \in [-1, 1]$.

a) Powołując się na odpowiednie twierdzenia uzasadnić ciągłość F.
b) Obliczyć $F(y)$.

Zadanie 2. Dla $t > 0$ zdefiniujmy $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \sin x\,dx$. Uzasadnić, że

$$F(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Zadanie 3. Zbadać ciągłość i różniczkowalność podanych funkcji na wskazanych przedziałach

a) $F(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^{2/3}}, \quad y \in [1, 5],$
b) $F(y) = \int_1^\infty e^{-xy}\,dx, \quad y \in [2, 3].$

Wskazówka. Powołać się na odpowiednie twierdzenia. W przypadku całki niewłaściwej znaleźć całkowalne majoranty.

Zadanie 4. Funkcja F zadana jest wzorem $F(y) = \int_0^\infty e^{-x} \sin(xy)\,dx$. Wyznaczyć dziedzinę funkcji F i sprawdzić jej ciągłość i różniczkowalność.
Wskazówka. Powołać się na odpowiednie twierdzenia. Znaleźć całkowalne majoranty.

Zadanie 5. Funkcja F określona jest wzorem

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos t)\,dt.$$

Obliczyć pochodne f', f'', a następnie pokazać, że spełnione jest równanie różniczkowe

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 6. Wiemy, że funkcja gamma Eulera jest określona wzorem

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x}\,dx, \quad \text{dla } y > 0.$$

a) Uzasadnić, że funkcja Γ jest ciągła.
b) Uzasadnić, że funkcja Γ jest różniczkowalna. Pokazać, że

$$\Gamma'(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} \ln x\,dx, \quad \text{dla } y > 0.$$

c) Uzasadnić, że $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$, dla $y > 0$.
d) Wywnioskować, że $\Gamma(n) = (n-1)!$, dla $n \in \mathbb{N}_+$.
e) Obliczyć $\Gamma(1/2)$.