Analiza Matematyczna 1
rok akademicki 2023/24
Lista 8

Zadanie 1. Oblicz górną $\overline{\int_0^1} f$ i dolną całkę $\underline{\int_0^1} f$ dla funkcji

$$a)\ f(x)=2, \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} 2, & \text{gdy } x\in\mathbb{Q}, \\ 1, & \text{gdy } x\notin\mathbb{Q}, \end{cases} \qquad c)\ f(x)=x.$$

Zadanie 2. Zapisz sumy całkowe $S(f,P,T)=\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$ dla funkcji f określonej na $[a,b]$, gdzie $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ podział odcinka $[a,b]$ na n równych części, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$ zbiór punktów pośrednich dla P, dla następujących przykładów.
a) $f(x)=x$, $[a,b]=[1,3]$, $t_i=(x_i+x_{i-1})/2$,
b) $f(x)=x^2$, $[a,b]=[0,2]$, $t_i=x_{i-1}$,
c) $f(x)=3^x$, $[a,b]=[1,2]$, $t_i=x_i$,
d) $f(x)=2$, $[a,b]=[2,5]$, $t_i=x_i$.

Zadanie 3. Korzystając z faktu, że jeśli funkcja f jest ciągła na $[a,b]$ to

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

oblicz następujące całki
a) $\int_1^3 x\,dx$, b) $\int_1^2 (2x+3)\,dx$, c) $\int_0^1 3^x\,dx$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f ciągła na $[a,b]$, $c\in[a,b]$, $w\neq f(c)$, oraz

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{gdy } x\neq c \\ w, & \text{gdy } x=c \end{cases}$$

Korzystając z kryterium: f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,\,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje taki podział P, że odpowiadające mu sumy górna i dolna różnią się o mniej niż ε, wykaż, że $g\in\mathbf{R}[a,b]$. Uzasadnij, że $\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$. Rozpatrz osobno 2 przypadki: $c\in(a,b)$, $c\in\{a,b\}$.

Zadanie 5. Wykaż, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{gdy } x\neq\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N} \\ 0, & \text{gdy } x=\frac{1}{n}, \end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemanna na $[0,\,1]$. Oblicz całkę $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Zadanie 6. Załóżmy, że f jest funkcją nieujemną i ciągłą na $[a,\,b]$, przy czym $\int_a^b f(x)\,dx=0$. Wykaż, że wówczas $f(x)=0$ dla każdego $x\in[a,b]$.

Zadanie 7. Załóżmy, że f ciągła na $[a,b]$, przy czym f nie jest stała. Udowodnij, że jeśli $\int_a^b f(x)\,dx=0$, to w przedziale $[a,\,b]$ istnieją punkty x_1, x_2 takie, że $f(x_1)f(x_2)<0$.

Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza i rozpatrując odpowiednie przedziały i funkcje, oblicz podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}\right)$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4+\cdots+(n+n)^4}{n^5}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\dfrac{k}{n}\right)$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt[2n]{e}+\sqrt[2n]{e^2}+...+\sqrt[2n]{e^n}\right)$,
f) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\dfrac{2}{n})\cdot(1+\dfrac{4}{n})...(1+\dfrac{2n}{n})}$.

Zadanie 9. Metodą całkowania przez części oblicz całki oznaczone:

a) $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^\pi x^3\sin x\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$, d) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{x}{\sin^2 x}\,dx$, e) $\displaystyle\int_1^2 x\log_2 x\,dx$.

Zadanie 10. Metodą całkowania przez podstawienie oblicz całki oznaczone:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$, b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Zadanie 11. Oblicz całki:

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx,\qquad \int_1^2\lfloor e^x\rfloor\,dx,\qquad \int_0^4\frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}\,dx.$$

Zadanie 12. Naszkicuj dla $x\geqslant 0$ wykres funkcji: a) $f(x)=\displaystyle\int_0^x\operatorname{sgn}(\sin t)\,dt$, b) $g(x)=\displaystyle\int_0^x t\lfloor t\rfloor\,dt$.

Zadanie 13. Oblicz pochodną funkcji:

a) $F(x)=\displaystyle\int_2^x\sin t\,dt$, b) $F(x)=\displaystyle\int_{-3}^x e^{-t^2}\,dt$, c) $F(x)=\displaystyle\int_c^{x^3}f(t)\,dt$, gdzie f jest ciągła,
d) $F(x)=\displaystyle\int_x^5 f(t)dt$, gdzie f jest ciągła.