

**Analiza Matematyczna 1**  
**rok akademicki 2023/24**  
**Lista 9**

**Zadanie 1.** Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi:

- a)  $y = x^2, y = x + 2,$
- b)  $y = x - \sin^2 x, y = x + \sin^2 x,$  dla  $0 \leq x \leq \pi,$
- c)  $4y = x^2, y = \frac{8}{x^2 + 4},$
- d)  $y = \ln x, y = \ln^2 x,$
- e)  $x = 1 - y^2, x = (y^2 - 1)/2,$
- f)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x = 0, y = 0.$

**Zadanie 2.** Obliczyć długości łuków:

- a)  $y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1/2],$
- b)  $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}, x \in [1, 5],$
- c)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in [0, 1],$
- d)  $x = \ln(\cos y), y \in [0, \pi/3].$

**Zadanie 3.** Obliczyć objętość bryły, jaka powstaje w wyniku obrotu obszaru  $D = \{(x, y) : x \in [0, \pi/2], 0 \leq y \leq \cos x\}$  wokół osi  $Ox$ .

**Zadanie 4.** Obliczyć pole powierzchni bryły, jaka powstaje w wyniku obrotu obszaru  $D = \{(x, y) : x \in [0, \pi/2], 0 \leq y \leq \cos x\}$  wokół osi  $Ox$ .

**Zadanie 5.** Obliczyć objętość bryły, jaka powstaje w wyniku obrotu obszaru  $D = \{(x, y) : x \in [1, \sqrt{3}], 0 \leq y \leq \ln x\}$  wokół osi  $Oy$ .

**Zadanie 6.** Obliczyć pole powierzchni torusa, jaki powstaje w wyniku obrotu koła  $D = \{(x, y) : (x - R)^2 + y^2 \leq r^2\}$  wokół osi  $Oy$ , dla  $0 < r < R$ .

**Zadanie 7.** Obliczyć pracę jaką wykonamy podnosząc ciało o masie  $m = 400$  kg na wysokość  $H = 140$  km nad powierzchnię Ziemi. Przyjąć, że promień Ziemi wynosi  $R = 6400$  km, zaniedbać opór powietrza.

Wskazówka. Przyjąć, że siła grawitacji na wysokości  $h > 0$  dla ciała o masie  $m$  wynosi

$$F(h) = \frac{GMm}{(R + h)^2},$$

gdzie  $M$  to masa Ziemi,  $G$  stała grawitacyjna.

**Zadanie 8.** Uzasadnić nierówności:

- a)  $0 < \int_0^{200} \frac{e^{-5x}}{x + 20} dx < 0,01,$
- b)  $\frac{1}{20\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^{10}}{\sqrt{1 + x^2}} dx < \frac{1}{20}.$

Wskazówka. Wykorzystać pierwsze twierdzenie o wartości średniej dla całek.