Analiza Matematyczna 1
rok akademicki 2023/24
Lista 1

1. Wykazać, że wartość bezwzględna liczby rzeczywistej ma następujące własności:

(a) $|x| = |-x|$;

(b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

(c) $|x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$, gdy $y \geqslant 0$;

(d) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

(e) $|xy| = |x|\,|y|$;

(f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, gdy $y \neq 0$;

(g) $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$;

(h) $|x| - |y| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|$;

(i) $|x^n - y^n| \leqslant n\, M^{n-1}|x-y|$, gdzie $M = \max\{|x|, |y|\}$,

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Rozwiązać równania i nierówności

(a) $|2|x+1|+1| = 3$;

(b) $2|x+6| - |x| + |x-6| = 18$;

(c) $|2x+1| \leqslant 5$;

(d) $|x^2 - 25| \leqslant 24$;

(e) $|3x| + 2 \leqslant |x-6|$.

3. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić, że

(a) $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;

(c) $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$ dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$;

(d) dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11;

(e) (wzór Newtona) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

4. Obliczyć poniższe sumy

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k\binom{n}{k}$.

5. Wykazać, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}$, $\log_2 3$ są liczbami niewymiernymi; natomiast poniższa liczba jest wymierna

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}.$$

6. Wyznaczyć liczbę pierwiastków rzeczywistych równania

$x \cdot |x| = x + c$

w zależności od wartości parametru rzeczywistego c.

7. Określić liczbę rozwiązań rzeczywistych równania

$(m-1)x^4 - (2m-1)x^2 + m - \frac{1}{4} = 0$

w zależności od wartości parametru rzeczywistego m. Pokazać, że w przypadku, gdy równanie ma cztery rozwiązania, to są one postaci

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{2\sqrt{m}+1}{2\sqrt{m}+2}}, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{2\sqrt{m}-1}{2\sqrt{m}-2}}.$